마탄자

특례수학 기출유형문제집

미적분

송정석 지음

2021학년도 특례전형대비
미적분
508제

마탄자의 STRUCTURE

새로운출제범위에따른 특례기출유형문제집

STEP1 개념보기

기본적인 교과서 내용과 특례지필고사에서 많이 출제된 개념들을 간단히 정리합니다. 특히 대학별고사에서 자주 출제되는 내용을 중심으로 구성하였습니다.

마탄자 Tip

문제 해결의 핵심 키워드 또는 접근법 등 실전에 활용할 수 있는 구체적인 문제 해결 방법을 제시하였습니다.

개념 01 수렴하는 수열의 극한

✎ 수열의 수렴 (收斂 convergence)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 이면 (단, k는 상수)

① $\lim_{n\to\infty} k\,a_n = k\alpha$

② $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

마탄자 Tip

‣ 조건을 만족하는 특정한 수열을 찾아라.

예를 들어 문제 $\lim_{n\to\infty}(3n-2)a_n = 4$에서

$\lim_{n\to\infty}(3n-2) = \infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이어야 한다. 이 때

STEP2 개념문제

기본유형의 반복학습으로 중위권 대학문제와 상위권 대학에서 출제되는 개념 문제에 대비할 수 있도록 하였습니다.

01 부정형의 극한값

01 2019학년도 국민대

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2

STEP3 특례기출

1.절대개념

대표문항에서 활용할 수 있고 개념 이해에 도움이 되는 핵심내용을 요약하였습니다.

2.유형별 대표문항

모든 대학의 기출문제를 분석하여 특례지필고사의 출제경향을 담았습니다.

3.유형문제

대표문항과 같은 유형으로 문제를 파악하고 이를 통하여 실전 감각을 키울 수 있도록 합니다.

유형 01 일반항과 수열의 극한

✎ 수렴하는 수열의 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 일반항 a_n을 구하여 계산한다.

등차수열의 일반항 $a_n = a + (n-1)d$

등비수열의 일반항 $a_n = ar^{n-1}$

마탄자의 STRUCTURE

구성과 학습법, 단계별구성

STEP4 지필발전

지필발전문제로 특례고사 만점에 대비
단원별로 지필고사 유형의 수능기출, 평가원, 사관학교, 경찰대 기출문제를 수록하여 특례기출 유형에서 다룰 수 없었던 출제 가능한 고난도 유형과 새로운 유형 등을 담았습니다.

89 2019학년도 아주대

곡선 $y=x^4$ 위의 점 $(-1, 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_1, 곡선 위의 점 (a_1, a_1^4)에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_2라 한다. 이와 같이 곡선 위의 점 (a_n, a_n^4)에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_{n+1}이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하면?

① 3 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -4

STEP5 정답과 해설

빠른 정답
상세풀이
정확히 알고 있던 문제는 자신의 풀이를 해설과 비교하며 완벽히 익혀서 피드백 학습이 될 수 있도록 합니다.
틀린 문제나 모르는 문제는 관련된 절대개념과matanza tip을 통해서 자신의 약점을 파악하고 보완할 수 있도록 합니다.
다른 풀이
실전에서 필요한 다양한 풀이를 제공하였습니다.
절대 개념
용어의 정의와 활용, 문제 해결의 팁, 복습에 필요한 절대개념 등을 설명하였습니다.

125 정답 128

두 직선 $y=3x+4$, $y=5x-3$이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, β라면 $\tan\alpha=3$, $\tan\beta=5$이다.

따라서 $\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\left|\frac{3-5}{1+15}\right|=\frac{1}{8}$이고

$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\frac{1}{64}=\frac{65}{64}$이다.

그러므로 $130\cos^2\alpha=130\times\frac{64}{65}=128$

절대개념

▸ 두 직선이 이루는 각의 크기
두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$

마탄자 특례수학

CONTENTS

미적분

I

수열의 극한

01 개념다시보기

개념 01 수렴하는 수열의 극한

✎ 수열의 수렴 (收斂 convergence)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 이면 (단, k는 상수)

① $\lim_{n\to\infty} k\, a_n = k\,\alpha$

② $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

④ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}\,(\beta \neq 0)$

개념 02 부정형의 극한값

✎ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 (極限 limit value)

① $\lim_{n\to\infty}$ [분자의 식의 차수<분모의 식의 차수]$=0$

② $\lim_{n\to\infty}$ [분자의 식의 차수>분모의 식의 차수]$=\pm\infty$

③ $\lim_{n\to\infty}$ [분자의 식의 차수=분모의 식의 차수]$=\alpha$

이때 극한값 α은 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 된다.

✎ $\infty-\infty$ 꼴의 극한

일반항이 다항식의 형태인 경우는 최고차항으로 묶어내고 계산한다. 예를 들어

$$\lim_{n\to\infty}(an^2-bn+c)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(a-\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)=\pm\infty$$

무리식의 경우는 분자를 유리화한다.

- 수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\cdots$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 이다.
- $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{k}{n^p}=0$ (단, k는 상수, p는 양수)

01 개념다시보기

✎ 부분분수의 합

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)(\text{단, } AB\neq 0,\ B-A\neq 0)$$

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

개념 08 교대급수의 수렴과 발산

✎ 교대급수 alternating series

교대급수는 수열의 각 항의 부호가 교대로 변하는 것을 말한다. 교대급수의 합을 구하는 일반적인 과정은 고교과정에서는 없지만 개념을 묻는 보기형 문제로 출제되고 있으니 간단한 경우로 정리합니다.

예를 들어 급수 $1+(-1)+1+(-1)+\cdots$의 합은 $S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ \cdots$ 이므로 수열 $\{S_n\}$은 진동한다. 따라서 부분합의 수열이 수렴하지 않으므로 급수는 발산한다.

그러므로 아래와 같은 풀이는 잘못된 것이다.

$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

$=\{1+(-1)\}+\{1+(-1)\}+\cdots=0+0+0+\cdots$

$=0$

✎ 수렴하는 교대급수의 합

수렴하는 교대급수의 합을 구하려면 짝수 항까지의 합 S_{2n}과 홀수 항까지의 합 S_{2n+1}을 각각 구하고

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$이면 수렴한다.

또, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}$이면 급수는 발산한다.

예를 들어 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots$

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=1$이므로 이 급수는 1에 수렴한다.

개념 09 수렴하는 급수의 성질

✎ 급수의 수렴과 일반항 (infinite series)

① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

② $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

③ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - k)$이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} (a_n - k) = 0$이다. 즉, $\lim_{n \to \infty} a_n = k$

개념 10 급수의 비교판정법

✎ 급수의 비교판정법 (comparison test)

급수 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \cdots +\frac{1}{n}+ \cdots$ 에서 이 급수의 수렴과 발산의 판정은 부분 합을 통하여 구할 수 없다.

왜냐하면 부분합 $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \cdots +\frac{1}{n}$을 구할 수 없기 때문이다.

이러한 경우는 이미 수렴하는 것을 알거나 발산함을 알고 있는 다른 급수와의 대소를 비교하여
그 수렴, 발산의 여부를 조사한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+ \cdots +\frac{1}{n}+ \cdots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+ \cdots > 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+ \cdots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+ \cdots = \infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

✎ 수렴하는 급수의 비교판정법 (comparison test)

모든 n에 대하여 $0 \le b_n \le c_n$이고 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$가 수렴하는 경우 증가하는 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$도 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+ \cdots +\frac{1}{n^2}+ \cdots$$

$$< 1+\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+ \cdots +\frac{1}{n(n+1)}+ \cdots = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

$\therefore 0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$은 수렴한다.

02 개념확인문제

01 부정형의 극한값

01 2019학년도 국민대

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2

02 2012학년도 고려대

$a_n{}^2=4n^2+2n$이고 b_n은 a_n의 소수부분이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$의 값은?

03 2015학년도 한양대 에리카

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 6

04 2017학년도 이화여대

극한값 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$을 구하시오.

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$

02 수열의 극한과 미정계수의 결정

05 2018학년도 성균관대

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 두 조건을 만족시킨다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2)=3$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(2a_n+5b_n)=2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

02 개념확인문제

05 부등식으로 주어진 수열의 극한

12

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$3n-2<a_n<3n+2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오.

13

수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식

$7^{n+1}-3^n<(3^{n+1}+7^n)a_n<3^n+7^{n+1}$ (n은 자연수)

이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

06 급수의 수렴과 발산

14 2020학년도 건국대

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=n+2n+\cdots+n\cdot n$일 때 다음 수열 중 0보다 크고 1보다 작은 수에 수렴하는 수열은?

① $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ ② $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ ③ $\left\{\frac{a_n}{n^3}\right\}$ ④ $\left\{\frac{a_n}{n^4}\right\}$

15 2010학년도 인하대

자연수 n에 대하여 5^n+2를 6으로 나눈 나머지를 r_n이라 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{6^n}$의 값은?

① $\frac{7}{35}$ ② $\frac{9}{35}$ ③ $\frac{11}{35}$ ④ $\frac{13}{35}$

07 부분분수를 이용한 급수

16 2019학년도 국민대

다음 급수의 합은?

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 발산

17 2019학년도 한양대 에리카

다음 급수의 합을 구하시오.

$$3+\frac{3}{1+2}+\frac{3}{1+2+3}+\frac{3}{1+2+3+4}+\cdots$$

① 2 ② 04 ③ 6 ④ 8

02 개념확인문제

09 수열의 극한과 급수의 관계

24 2019학년도 항공대

수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 급수가 수렴한다.

$$(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{\sqrt{3}}-1\right)+\left(\frac{a_3}{\sqrt{9}}-1\right)+\left(\frac{a_4}{\sqrt{27}}-1\right)+\cdots$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3^{n+1}}+a_n}{2\sqrt{3^{n-1}}-a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 4 ④ 10

25 2019학년도 숙명여대

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n^2a_n-1)=5$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3a_n}{2n+1}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 5

26 2018학년도 한양대 에리카

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{a_n}{3}\right)=3$일 때, 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 3 ④ 9

27 2019학년도 경희대

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=2$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$일 때 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2

28 2017학년도 국민대

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}+4\right)=7$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-5}{3n+8}$의 값은?

① $-\frac{8}{3}$ ② -2 ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$

03 특례기출유형

유형 01 일반항과 수열의 극한

✎ 수렴하는 수열의 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 일반항 a_n을 구하여 계산한다.

등차수열의 일반항 $a_n = a+(n-1)d$

등비수열의 일반항 $a_n = ar^{n-1}$

마탄라 Tip

- $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$에서 일반항 a_n을 구한다.
- $\sqrt{4n^2+4n}$의 소수 부분은 근호 안의 수와 완전제곱수의 대소 관계를 추정하여 정수부분을 먼저 찾는다. $(2n)^2 < 4n^2+4n < (2n+1)^2$이므로 $a_n = \sqrt{4n^2+4n}-2n$

41 2016학년도 경희대

이차방정식 $(2n+1)x^2-(3n+1)x+n=0$이 자연수 n에 대하여 두 개의 해를 갖고 그 해를 각각 α_n과 β_n $(\beta_n > \alpha_n)$이라 할 때 $\lim_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1

42 2018학년도 한양대 에리카

자연수 k에 대하여 $a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+k^n}$일 때, $\sum_{k=1}^{100} 2a_k$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

43 2016학년도 이화여대

모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{4n^2+4n}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$

44 2017학년도 한양대 에리카

수열 $\{a_n\}$의 첫째 항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 5^n+4^n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ 5

45 2016학년도 성균관대

집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 두 부분집합 A, B는 다음의 세 조건을 만족시킨다.

(가) $A \subset B$
(나) $A \neq B$
(다) $A \cup B \neq U$

이러한 A, B의 쌍의 개수를 a_n이라고 할 때 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}+3^{n+2}}$은?

① 0 ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{3}$

67 2015학년도 이화여대

첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여, 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+2}}+\cdots$$

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12

68 2014학년도 인하대

수열 $\{a_n\}$이 $a_2=-1$, $a_5=-7$인 등차수열일 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}2^{a_n}$의 합은?

① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$

유형 07 수열의 극한으로 정의된 함수

✎ 함수 $f(x)$가 x^n을 포함한 극한값

$\lim_{n\to\infty}x^n$의 극한값을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

① $-1<x<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$

② $x=1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=1$

③ $x=-1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=$진동

④ $|x|>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=\pm\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$

69 2019학년도 경희대

상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n+1}-bx^2+2}{x^{2n}+1}$가 $x=1$에서 미분 가능할 때 $2a+b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9

70 2011학년도 인하대

$x\neq-1$인 실수 x에 대해 정의된 함수 $f(x)$가

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$를 만족한다.

다음의 설명 중에서 옳은 것은?

(ㄱ) 극한 $\lim_{x\to-1}f(x)$가 존재한다.

(ㄴ) $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이다.

(ㄷ) $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① (ㄱ), (ㄴ) ② (ㄴ), (ㄷ)
③ (ㄱ), (ㄷ) ④ (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)

유형 09 수열의 극한과 그 활용

✎ 함수의 그래프 또는 도형이 주어진 경우

① 구하려는 점의 좌표, 선분의 길이, 도형의 넓이를 n에 관한 식으로 나타낸다.

② 조건에서 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ 을 차례로 구하여 규칙을 찾거나 주어진 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

마플러 Tip

- 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$
- 원과 직선이 접할 조건
  원의 중심과 직선 사이의 거리는 반지름과 같다.

76 — 2017학년도 성균관대

자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4^n}$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 중 y절편이 양수인 것을 l_n이라 하고 직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$
④ $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

77 — 2012학년도 고려대

a_n은 $n(n+1)(n+2)$을 10으로 나눈 나머지라 정의하자. 이 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{5n-3}}{5^n}$의 값은?

78 — 2016학년도 성균관대

자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2^n}$에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$인 직선 중 y절편이 양수인 것을 l_n이라 하고, 직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은

① $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

79 — 2014학년도 고려대

자연수 n에 대하여 점 $(n,\ 0)$에서 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프에 그은 두 접선의 접점을 각각 $A_n\left(\alpha_n,\ \alpha_n^2+1\right),\ \ B_n\left(\beta_n,\ \beta_n^2+1\right)$이라 하자. 이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_nB_n}}{n^2}$을 구하시오.

03 특례기출유형

유형 10 닮음 도형에서의 등비급수

✎ 닮음비가 $m : n\ (m > n)$인 도형들의 길이는 공비가 $\frac{n}{m}$인 등비수열이다.

① 넓이의 비는 $m^2 : n^2$이고 공비가 $\frac{n^2}{m^2}$인 등비수열

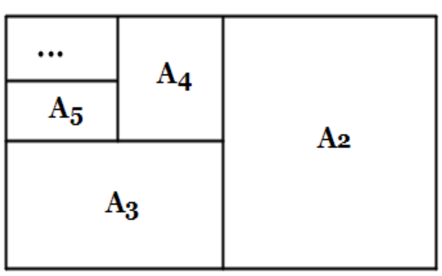
② 부피의 비는 $m^3 : n^3$이고 공비가 $\frac{n^3}{m^3}$인 등비수열

마탄라 Tip

- 일정한 비율로 줄어드는 꼴의 등비급수 문제는 닮음비를 이용해서 공비를 찾는 것이 편리하다. 즉, 도형에 관련된 등비급수 문제는 첫째항과 공비를 찾으면 된다.

80 (2020학년도 건국대)

아래 그림과 같이 주어진 직사각형 A_1을 계속하여 반으로 나눠서 A_1과 닮은 직사각형 A_2, A_3, A_4, $\cdots$ 을 차례로 얻었다. A_k의 긴 변의 길이를 L_k라 하면 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{L_k}{L_1}\right)$의 값은?

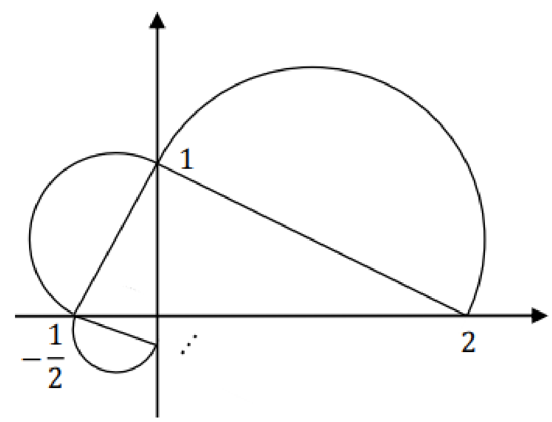


① 2　　② 3　　③ $2+\sqrt{2}$　　④ $3+\sqrt{2}$

81 (2019학년도 이화여대)

주어진 그림과 같이 $(2,\ 0)$과 $(0,\ 1)$을 잇는 선분을 지름으로 갖는 반원의 넓이를 S_1, $(0,\ 1)$과 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$을 잇는 선분을 지름으로 갖는 반원의 넓이를 S_2, $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$과 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$을 잇는 선분을 지름으로 갖는 반원의 넓이를 S_3, $\cdots$ 과 같이 S_n을 정의할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하시오.

① $\frac{5\pi}{6}$　　② $\frac{5\pi}{4}$　　③ $\frac{5\pi}{3}$　　④ $\frac{5\pi}{2}$



82 (2017학년도 이화여대)

x축과 y축에 접하는 반지름이 1인 원 C_1이 있다. 원 C_2는 x축, y축과 원 C_1에 외접하는 반지름이 1보다 작은 원이다. 마찬가지로 원 C_n은 x축, y축과 원 C_{n-1}에 외접하고 반지름이 C_{n-1}의 반지름보다 작은 원이라 할 때, 이 원들의 넓이의 합을 구하시오.

① $\frac{(3\sqrt{2}-4)\pi}{8}$　　② $\frac{(3\sqrt{2}-4)\pi}{4}$

③ $\frac{(3\sqrt{2}+4)\pi}{8}$　　④ $\frac{(3\sqrt{2}+4)\pi}{4}$

04 지필발전문제

494 2017학년도 성균관대

$f(x)=x^2+4x+8\ (0 \le x \le 2)$에 대하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n^2}\left[nf\left(\frac{k}{n}\right)\right]$을 계산하면? (단, $[x]$는 x보다 작거나 같은 정수 중 가장 큰 수)

① 0 ② $\frac{45}{2}$ ③ $\frac{80}{3}$ ④ 30 ⑤ 40

495 2018학년도 수능기출

함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$ 일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은?

496 2018학년도 사관학교

도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(\pi)=0$
(다) $\int_0^{\pi} x^2 f'(x)\,dx=-8\pi$

$\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos x)f(x)\,dx=k\pi$ 일 때, k의 값을 구하시오.

497

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-2\int_0^x e^t f(t)\,dt=1$을 만족시킬 때, $f''(0)$의 값을 구하여라. (단, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수)

498 2014학년도 경찰대

함수 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\int_{-n}^{n}\frac{\{f(x)\}^n}{n}dx$의 값은?

① $\frac{10}{11}$ ② $\frac{20}{11}$ ③ $\frac{80}{3}$ ④ 10

499 2016학년도 사관학교

$x\ge 0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{3k}{n}\right)$의 값은?

① $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$

04 지필발전문제

506 2014학년도 9월 모의수능

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 를 만족시키고,

$\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2 + 4$ 이다.

$\int_1^{e} f(\ln x)\,dx = ae + b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

507

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \ \ (n = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$ 에 대하여

$f(n) = I_n + I_{n+2}$ 라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(n+2) = \frac{q}{p}$ 일 때,

서로소인 두 자연수 p, q 에 대하여 $p + q$ 의 값을 구하여라.

508 2017학년도 인하대

좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, \ y)$의 시각 $t \ (t > 0)$에서의 위치가 $x = \ln t, \ y = t$일 때,

점 P가 시각 $t = 1$에서 시각 $t = a$까지 움직인 거리를 $s(a)$ 라고 하자. $s'(2)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

➤ 빠른 정답

I 수열의 극한

STEP 01 개념확인문제

001. ②	002. 2	003. ①	004. ③	005. ④	006. ③	007. ③	008. 5	009. ④	010. ⑤
011. ①②	012. 3	013. 7	014. ③	015. 2	016. ①	017. ③	018. ③	019. ③	020. ②
021. ②	022.1,발산	023. ②	024. ③	025. ①	026. ④	027. ④	028. ①	029. ①	030. ①
031. 해설	032. ①	033. ③	034. ②	035. ⑤	036. 해설	037. ④	038. ①②	039. 해설	040. ②

STEP 02 특례기출유형

041. ③	042. ④	043. ③	044. ③	045. ②	046. ①	047. 3	048. ②	049. ①	050. ②
051. ①	052. ①	053. ③	054. ④	055. ②	056. ②	057. ③	058. ④	059. ④	060. ③
061. ①	062. ④	063. ②	064. ③	065. ②	066. ③	067. ①	068. ③	069. ①	070. ②
071. 1	072. ②	073. ①	074. ④	075. 5	076. ①	077. 1	078. ③	079. 4	080. ③
081. ①	082. ③	083. ③	084. ③	085. ②	086. ③	087. ②	088. ④		

STEP 03 지필발전문제

								089. ③	090. ②
091. 3	092. ③	093. ③	094. ①	095. 33	096. 11	097. ②③	098. ②	099. ①	100. ①
101. ①	102. ③	103. ②	104. ②	105. ③	106. -1				

II 여러가지의 함수 미분

STEP 01 개념확인문제

						107. ②	108. ③	109. ①	110. 8
111. 1/e	112. e^2	113. ③	114. ③	115. ③	116. ③	117. 2	118. 0	119. ③	120. ②
121. ④	122. ②	123. ②	124. ③	125. 128	126. 1/7	127. $\pi/4$	128. 1	129. ②	130. 7
131. ①	132. ④	133. ②	134. ①	135. ④	136. ④	137. ④	138. ④	139. 3e	140. 3
141. $\sqrt{5}$	142. 2	143.2							

STEP 02 특례기출유형

			144. ⑤	145. ②	146. 5	147. 2	148. ①	149. ①	150. 9
151. 6	152. ①	153. ③	154. 20	155. ③	156. ①	157. ④	158. ④	159. ①	160. ②
161. ④	162. ③	163. ③	164. 8	165. 12	166. ④	167. 6	168. ④	169. ②	170. ②
171. ③									

STEP 03 지필발전문제

	172. ②	173. ②	174. ⑤	175. ①	176. ③	177. 1	178. 40	179. ①	180. 6
181. ②	182. π								

01. 개념확인문제

01 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\sqrt{n^2+n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

02 정답 2

수열 $a_n=\sqrt{4n^2+2n}$ 에서
$2n<\sqrt{4n^2+2n}<2n+1$이므로 $\sqrt{4n^2+2n}$ 의 정수부분은 $2n$이다. 그러므로 소수부분
$b_n=\sqrt{4n^2+2n}-2n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n}-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n}+2n}{2n}=2$$

03 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{3}{2}$$

04 정답 ③

부정형의 극한값에서 분자를 유리화한다.

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$$
$$=\frac{(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)\{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2\}}{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}$$
$$=\frac{n^2}{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}$$

분모와 분자를 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{3}$$

절대개념

▸ $\infty-\infty$ 꼴의 극한
무리식의 형태인 경우는 분자를 유리화를 하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 의 꼴로 바꾼다.

▸ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값
분모의 최고차 항으로 분자와 분모를 나누어 구한다.
그 이유는 분모의 최고차항으로 나누면 그 보다 차수가 낮은 항들은 모두 $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\cdots$ 을 포함하는 꼴이므로 $\frac{\text{상수}}{\infty}=0$이 되기 때문이다.

05 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}(3a_n+2)-\lim_{n\to\infty}2=\lim_{n\to\infty}3a_n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+5b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+5\lim_{n\to\infty}b_n=2$에서

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{4}{15}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$

06 정답 ③

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{3n+1}=2$에서 극한값이 존재하기 위해서는
$a=0$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+5}{3n+1}=\frac{b}{3}=2$이므로 $b=6$이다.
따라서 $a-b=-6$이다.

절대개념

▸ 부정형 $\frac{\infty}{\infty}$ 의 극한값

① 분모의 최고차수 항으로 분자와 분모를 나누어 구한다.
② 분자의 식의 차수와 분모의 식의 차수가 같으면 극한값은 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 된다.

07

정답 ③

$a_n-b_n=c_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{2}$, $b_n=a_n-c_n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+4b_n}{4a_n+5b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7a_n-4c_n}{9a_n-5c_n}=\frac{7}{9}$$

08

정답 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+2}+1)a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+2}+1)a_n}{b_n}\times\frac{4^n+1}{4^n+1}\times\frac{2^n+1}{2^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4^n+1)a_n}{4^n+1}\times\frac{2^n+1}{(2^n+1)b_n}(2^{n+2}+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{4^n+1}\times\frac{2^n+1}{4}(2^{n+2}+1)=5$$

다른 풀이

주어진 조건을 만족하는 수열 $a_n=\frac{5}{4^n}$, $b_n=\frac{4}{2^n}$라면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+2}+1)a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}(2^{n+2}+1)\times\frac{5}{4^n}\times\frac{2^n}{4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(4+\frac{1}{2^n})\times\frac{5}{4}=5$$

마탄라 Tip

▸ 조건을 만족하는 특정한 수열을 찾아라.

예를 들어 문제 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-2)a_n=4$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}(3n-2)=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이어야 한다. 이 때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$인 수열 $\{a_n\}$ 중에서 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-2)a_n=4$을 만족하는 것은 $a_n=\frac{4}{3n}$, $\frac{4}{3n+1}$, $\frac{4}{3n+2}$, …이 될 수 있다.

이 중 하나인 $a_n=\frac{4}{3n}$을 선택하여 계산한다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{4}{3n}\right)=\frac{4}{3}$$

09

정답 ④

극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$의 분모와 분자를 3^n으로 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}+3}{(\frac{2}{3})^n+1}=3$$

10

정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3+\frac{5}{3^n}}{1}=6$$

11

정답 ①②

① $r>1$ 일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r^2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{r^{n-2}}}{1+\frac{1}{r^n}}=1$$

② $r=1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r^2}{r^n+1}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

③ $-1<r<1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r^2}{r^n+1}=\frac{0+r^2}{0+1}=r^2$$

④ $r=-1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n$의 극한값은 존재하지 않으므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^n+r^2}{r^n+1}$은 없다.

따라서 옳은 것은 ①②이다.

12

정답 3

$3n-2<a_n<3n+2$의 각 변을 n으로 나누면

$$\frac{3n-2}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{3n+2}{n}$$

이 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$이다.

13 정답 7

$7^{n+1}-3^n<(3^{n+1}+7^n)a_n<3^n+7^{n+1}$이므로

$$\frac{7^{n+1}-3^n}{3^{n+1}+7^n}<a_n<\frac{3^n+7^{n+1}}{3^{n+1}+7^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7^{n+1}-3^n}{3^{n+1}+7^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\left(\frac{3}{7}\right)^n}{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=\frac{7-0}{0+1}=7$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+7^{n+1}}{3^{n+1}+7^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=\frac{0+7}{0+1}=7$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=7$

14 정답 ③

일반항 $a_n=n+2n+\cdots+n\cdot n$

$=n(1+2+3+\cdots+n)=n\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^3+n^2}{2}$이다.

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{n^3+n^2}{2}=\infty$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{n^3+n^2}{2}=\infty$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\times\frac{n^3+n^2}{2}=\frac{1}{2}$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\times\frac{n^3+n^2}{2}=0$

따라서 0보다 크고 1보다 작은 수에 수렴하는 것은 ③이다.

15 정답 ②

$n=1$일 때 5^1+2를 6으로 나눈 나머지 $r_1=1$,

$n=2$일 때 5^2+2를 6으로 나눈 나머지 $r_2=3$,

$n=3$일 때 5^3+2를 6으로 나눈 나머지 $r_3=1$,

$n=4$일 때 5^4+2를 6으로 나눈 나머지 $r_4=3$이다.

같은 방법으로 계속하면 수열 r_n : 1, 3, 1, 3,1, $\cdots$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{6^n}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{3}{6^4}+\cdots$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^5}+\cdots+\left(\frac{3}{6^2}+\frac{3}{6^4}+\frac{3}{6^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6^2}}+\frac{\frac{3}{6^2}}{1-\frac{1}{6^2}}=\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\frac{9}{35}$$

다른 풀이

이항정리를 이용하면

$5^n=(6-1)^n$

$={}_nC_0(-1)^n+{}_nC_1(-1)^{n-1}\cdot 6+{}_nC_2(-1)^{n-2}\cdot 6^2+\cdots$

$n=1$일 때 $-1+6=5$이므로 $r_1=1$,

$n=2$일 때 $1-{}_2C_1\cdot 6+{}_2C_2\cdot 6^2$이므로 $r_2=3$,

$n=3$일 때 $-1+{}_3C_1\cdot 6-{}_3C_2\cdot 6^2+{}_3C_3\cdot 6^3$이므로

$r_3=1$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{6^n}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{3}{6^4}+\cdots$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6^2}}+\frac{\frac{3}{6^2}}{1-\frac{1}{6^2}}=\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\frac{9}{35}$$

16 정답 ①

수열의 합 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

17 정답 ③

급수 $3+\dfrac{3}{1+2}+\dfrac{3}{1+2+3}+\dfrac{3}{1+2+3+4}+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n(n+1)}\right)=6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$$

18

정답 ③

수열의 일반항 $a_n=4n+10$에서

$a_n\times a_{n+1}=(4n+10)(4n+14)=4(2n+5)(2n+7)$

$$\frac{1}{a_n\,a_{n+1}}=\frac{1}{4}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\,a_{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2n+7}\right)=\frac{1}{56}$$

19

정답 ③

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

20

정답 ②

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$이고

이 식에 n대신 $1, 2, 3,\cdots n-1$를 대입하면

$a_2-a_1=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}$,

$a_3-a_2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}$,

$a_4-a_3=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}$,

$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}$이다.

이 식들을 모두 변변 더하면$a_n-a_1=1-\dfrac{1}{2n-1}$이므로

$a_n=5-\dfrac{1}{2n-1}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}5-\frac{1}{2n-1}=5$$

21

정답 ②

$a_n=2\dfrac{(n-1)n}{2}+n-1=(n+1)(n-1)$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

절대개념

▸ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 인 꼴의 점화식

$n=1, 2, 3, \cdots$ 을 차례로 대입한 다음 변변 더하면 그 일반항을 구할 수가 있습니다.

$a_2=a_1+f(1)$

$a_3=a_2+f(2)$

$a_4=a_3+f(3)$

$\vdots$

$a_n=a_{n-1}+f(n-1)$의 식들을 변변 더하면

$$a_n=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

22

정답 1, 발산

① 수열 S_n 의 각각의 항들 $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots$을 구하면

$1, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{3}{4}, \cdots$이다.

그러므로 수열 $S_{2n}=\dfrac{n}{n+1}$이고

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$이므로 급수는 수렴하고 합은 1이다.

② 수열의 항 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$이므로 이 급수는 발산한다.

30 정답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2^n}{2^{n+1}-1}\right)$이 수렴할 때

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{n}-\frac{2^n}{2^{n+1}-1}\right\}=0$으로 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+a_n}{2n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{a_n}{n}}{2-\frac{a_n}{n}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{3}{3}=1$$ 이다.

31 정답 ①$\frac{4}{3}$, ②$\frac{26}{7}$

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n+\left(-\frac{2}{5}\right)^n\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}+\frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=4-\frac{2}{7}=\frac{26}{7}$

32 정답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$이다.

수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $a_1{}^2=9$이고, 공비가 $r^2=\frac{1}{9}$인

등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{\frac{8}{9}}=\frac{81}{8}$

33 정답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+\sin(\pi+\frac{\pi}{4})\times(\frac{1}{2})+\sin(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4})\times(\frac{1}{2})^2$

$+\sin(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{4})\times(\frac{1}{2})^3+\sin(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{4})\times(\frac{1}{2})^4+\cdots$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times(\frac{1}{2})^2$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}\times(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\times(\frac{1}{2})^4+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-(-\frac{1}{4})}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1-(-\frac{1}{4})}=\frac{\sqrt{2}}{5}$

34 정답 ②

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$

$=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}+(\frac{1}{3})^2\sin\pi+(\frac{1}{3})^3\sin\frac{3\pi}{2}+\cdots$

$=\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2\times0+(\frac{1}{3})^3(-1)+(\frac{1}{3})^4\times0+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-(-\frac{1}{9})}=\frac{3}{10}$

35 정답 ⑤

순환소수 $0.20192019201920192019\cdots$

$=0.2019+0.00002019+0.000000002019+\cdots$

$=0.2019+0.2019\times\frac{1}{10^4}+0.2019\times\frac{1}{10^8}+\cdots$

$=\frac{0.2019}{1-\frac{1}{10^4}}=\frac{2019}{9999}$

36 정답 $-2<x<2, -\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$

① 공비가 $\frac{x}{2}$이므로 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x}{2}<1$ $\therefore -2<x<2$

② 공비가 $-\frac{2}{3}x$이므로 등비급수가 수렴하려면

$-1<-\frac{2}{3}x<1$ $\therefore -\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$

488

정답 ⑤

곡선 $y=f(x)$의 $(3,2)$에서의 접선을 l_1이라고 하자.

$f(x)=-2+2\sqrt{1+x}\ (x\ge 0)$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$,

$f'(3)=\dfrac{1}{2}$이다. 접선 l_1의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}(x-3)+2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

$f(x)=2-2\sqrt{1-x}\ (x<0)$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$이다.

$f(-3)=-2$이므로 $g'(-2)\times f'(-3)=1$에서

$f'(-3)=\dfrac{1}{2}$이므로 $g'(-2)=2$이다.

곡선 $y=g(x)$의 $(-2,-3)$에서의 접선을 l_2는

$y=g'(-2)(x+2)-3=2x+1$

그림과 같이 접선 l_1, l_2의 교점 $P(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3})$이고

$y=f(x)$와 직선 l_2의 교점은 방정식

$2-2\sqrt{1-x}=2x+1$의 해이다. 따라서 교점

$B(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}+1)$이다.

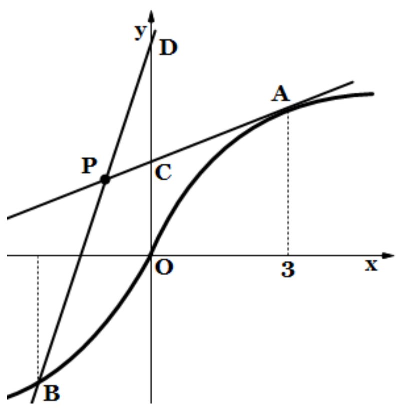
두 직선 l_1, l_2와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\{(2x+1)-f(x)\}dx$ −(삼각형 PCD의

넓이)+ $\displaystyle\int_{0}^{3}\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(x)\right\}dx$

$=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}(2x-1+2\sqrt{1-x})dx-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

$+\displaystyle\int_{0}^{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-2\sqrt{1+x}\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{12}=\frac{6\sqrt{3}-1}{12}$



489

정답 ④

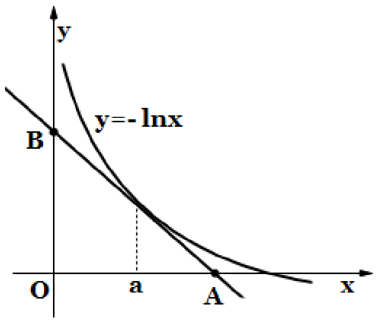
함수 $y=-\ln x$에서 $y'=-\dfrac{1}{x}$이고 곡선 $y=-\ln x$ 위의

점 $(a, -\ln a)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{a}(x-a)-\ln a=-\dfrac{1}{a}x+1-\ln a$

x절편은 $A(a-a\ln a, 0)$이고 y절편은 $B(0, 1-\ln a)$이다.

구하는 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$이다.



함수 $S(a)=\dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$, $(0<a<1)$라고 하면

$S'(a)=\dfrac{1}{2}\left\{(1-\ln a)^2+a\times 2(1-\ln a)(-\dfrac{1}{a})\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(1-\ln a)^2-2(1-\ln a)\}$

$=\dfrac{1}{2}(\ln a-1)(\ln a+1)$

그러므로 $S'(a)=0$인 $a=\dfrac{1}{e}, e$이다.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$S'(a)$		$+$		$-$		$+$
$S(a)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $a=\dfrac{1}{e}$에서 극대이며 최대이고 최댓값 $\dfrac{2}{e}$이다.

$$= -\frac{1}{n^2}\times(1+2+\cdots+n)\ln n + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k$$

$$= -\frac{1}{n^2}\times \ln n\sum_{k=1}^{n}k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k\ln k - k\ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}$$

이것을 정적분으로 나타내어 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\ln y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}ln\frac{k}{n} = \int_0^1 x\ln x\,dx$$

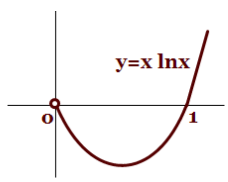
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x dx = -\frac{1}{4}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\ln y = -\frac{1}{4}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} y = e^{-\frac{1}{4}}$

절대개념

▸ **이상적분법 : 불연속함수에서 정적분의 연산**

함수 $y=x\ln x$는 $x>0$에서 존재한다.



$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x\ln x\,dx$$

$$= \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_a^1 - \frac{1}{2}\int_a^1 x dx = -\frac{1}{4}$$

$$= \lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{2}a^2\ln a - \frac{1}{4}(1-a^2)\right\} = -\frac{1}{4}$$

494 정답 ③

함수 $f(x)$는 $[0,\ 2]$에서 증가함수이고 $f(x)>0$이다.
어떤 실수 x에 대하여 $[x]=x-\alpha\ (0\le\alpha<1)$이 성립하므로 $nf(\frac{k}{n})-1<\left[nf(\frac{k}{n})\right]\le nf(\frac{k}{n})$이다.

양변에 $\frac{1}{n^2}$을 곱하면

$$\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}\left[nf(\frac{k}{n})\right] \le \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n^2} < \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n^2}\left[nf(\frac{k}{n})\right] \le \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

위 식의 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n-1}f(x_k)\Delta x$

이때 x_k는 $[0,\ 2]$의 $2n$등분점이고 $\Delta x = \frac{2-0}{2n}$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n-1}f(x_k)\Delta x = \int_0^2 f(x)dx$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2} = 0$$

부등식의 압착정리에 의해서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n^2}\left[nf\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n-1}f(x_k)\Delta x = \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 (x^2+4x+8)dx = \left[\frac{x^3}{3}+2x^2+8x\right]_0^2 = \frac{80}{3}$$

495 정답 $\ln 17$

함수 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}dt$에서

$1+e^t = s$로 놓으면 $e^t = \frac{ds}{dt}$이고,

$t=0$일 때 $s=2$이고, $t=x$일 때 $s=1+e^x$이므로

$$f(x) = \int_2^{1+e^x}\frac{1}{s}dt = [\ln s]_2^{1+e^x} = \ln(1+e^x) - \ln 2$$

$$= \ln\frac{1+e^x}{2}$$

$$(f\circ f)(a) = f(f(a)) = f\left(\ln\frac{1+e^a}{2}\right) = \ln\frac{1+e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}}{2}$$

이때, $e^{\ln\frac{1+e^a}{2}} = \left(\frac{1+2^a}{2}\right)^{\ln e} = \frac{1+e^a}{2}$이므로

$$(f\circ f)(a) = \ln\frac{1+e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}}{2} = \ln\frac{1+\frac{1+e^a}{2}}{2} = \ln\frac{3+e^a}{4}$$

한편, $(f\circ f)(a) = \ln 5$이므로 $\ln\frac{3+e^a}{4} = \ln 5$

이때, $y=\ln x$는 일대일 함수이므로 $\frac{3+e^a}{4} = 5,\ e^a = 17$

따라서 $a = \ln 17$

500

정답 9

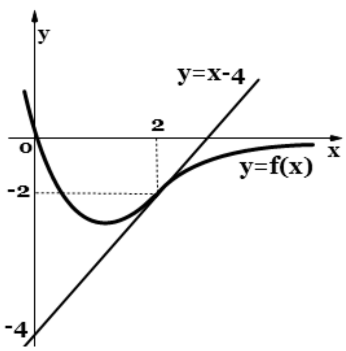
조건을 만족시키려면 점 $(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이어야 한다. $f(x)=-xe^{2-x}$에서

$f'(x)=e^{2-x}(x-1)$, $f''(x)=e^{2-x}(2-x)$

함수 $f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f''(2)=0$이므로 $a=2$이고 $f'(2)=1$, $f(2)=-2$이므로 $g(x)=x-4$이다. 따라서 구하는 넓이는

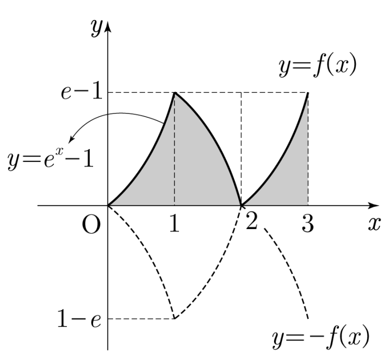
$$\int_0^2\{-xe^{2-x}-(x-4)\}dx=\left[xe^{2-x}+e^{2-x}-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^2$$

$=9-e^2$ $\therefore$ $k=9$

501

정답 $2e-3$

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 $\int_1^3 f(x)dx$는 가로와 세로의 길이가 각각 1, $e-1$인 직사각형의 넓이와 같다.

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1(e^x-1)dx+(e-1)\times 1$$

$=\left[e^x-x\right]_0^1+e-1$

$=2e-3$

502

정답 ②

$f(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 x축과 만난다. 이때, $f(x)+f(\pi-x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이다

따라서 구하는 넓이는 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+2}dx$이다.

$t=\sin x+2$라 하면

$x=0$일 때, $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=3$이고

$dt=\cos x dx$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+2}dx=2\int_2^3\frac{1}{t}dt$$

$$=2\Big[\ln t\Big]_2^3=2(\ln 3-\ln 2)\ =2\ln\frac{3}{2}$$

503

정답 -1

$$\int_n^{n+1}f(x)dx\ =\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx\ +\ \cdots$$

$$+\int_{n-1}^n\ f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore\int_1^n f(x)dx\ -\ \frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}n\left(\int_1^n f(x)dx\ -\ \frac{3}{4}\right)\ =\ \lim_{n\to\infty}n\cdot-\frac{2n+1}{2n(n+1)}=-1$$