새로운 출제범위에 따른
특례기출 유형문제집

특례 수학

마탄자

수학 I

송정석 지음

2021학년도 특례전형대비
수학 I
354제

마탄자특례수학

마탄자의 STRUCTURE

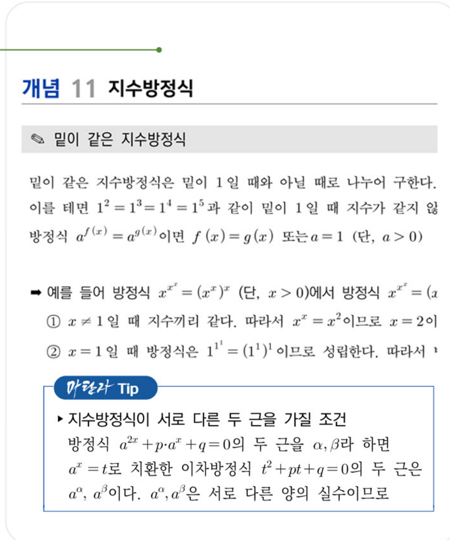
새로운출제범위에따른 특례기출유형문제집

STEP1 개념보기

기본적인 교과서 내용과 특례지필고사에서 많이 출제된 개념들을 간단히 정리합니다. 특히 대학별고사에서 자주 출제되는 내용을 중심으로 구성하였습니다.

마탄자 Tip

문제 해결의 핵심 키워드 또는 접근법 등 실전에 활용할 수 있는 구체적인 문제 해결 방법을 제시하였습니다.



개념 11 지수방정식

✎ 밑이 같은 지수방정식

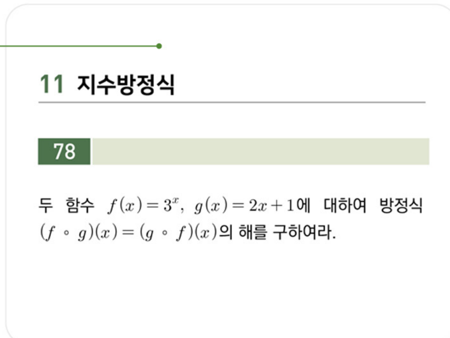
밑이 같은 지수방정식은 밑이 1 일 때와 아닐 때로 나누어 구한다.
이를 테면 $1^2=1^3=1^4=1^5$과 같이 밑이 1 일 때 지수가 같지 않
방정식 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$이면 $f(x)=g(x)$ 또는 $a=1$ (단, $a>0$)

➡ 예를 들어 방정식 $x^{x^x}=(x^x)^x$ (단, $x>0$)에서 방정식 $x^{x^x}=(x$
① $x\neq 1$일 때 지수끼리 같다. 따라서 $x^x=x^2$이므로 $x=2$이
② $x=1$일 때 방정식은 $1^{1^1}=(1^1)^1$이므로 성립한다. 따라서

마탄자 Tip
▸ 지수방정식이 서로 다른 두 근을 가질 조건
방정식 $a^{2x}+p\cdot a^x+q=0$의 두 근을 α, β라 하면
$a^x=t$로 치환한 이차방정식 $t^2+pt+q=0$의 두 근은
a^α, a^β이다. a^α, a^β은 서로 다른 양의 실수이므로

STEP2 개념문제

기본유형의 반복학습으로 중위권 대학문제와 상위권 대학에서 출제되는 개념 문제에 대비할 수 있도록 하였습니다.



11 지수방정식

78

두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=2x+1$에 대하여 방정식 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$의 해를 구하여라.

STEP3 특례기출

1.절대개념

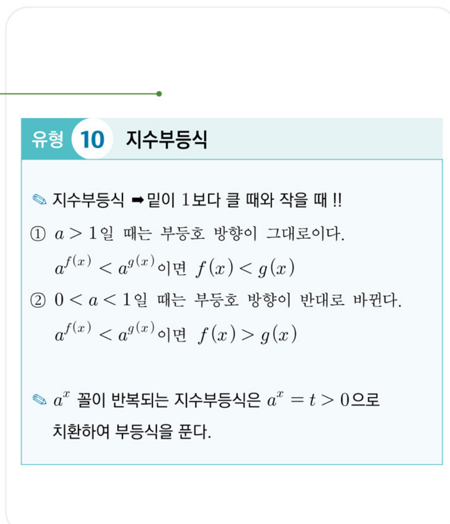
대표문항에서 활용할 수 있고 개념 이해에 도움이 되는 핵심내용을 요약하였습니다.

2.유형별 대표문항

모든 대학의 기출문제를 분석하여 특례지필고사의 출제경향을 담았습니다.

3.유형문제

대표문항과 같은 유형으로 문제를 파악하고 이를 통하여 실전 감각을 키울 수 있도록 합니다.



유형 10 지수부등식

✎ 지수부등식 ➡ 밑이 1보다 클 때와 작을 때 !!
① $a>1$일 때는 부등호 방향이 그대로이다.
$a^{f(x)}<a^{g(x)}$이면 $f(x)<g(x)$
② $0<a<1$일 때는 부등호 방향이 반대로 바뀐다.
$a^{f(x)}<a^{g(x)}$이면 $f(x)>g(x)$

✎ a^x 꼴이 반복되는 지수부등식은 $a^x=t>0$으로 치환하여 부등식을 푼다.

마탄자의 STRUCTURE

구성과 학습법, 단계별구성

STEP4 지필발전

지필발전문제로 특례고사 만점에 대비
단원별로 지필고사 유형의 수능기출, 평가원, 사관학교, 경찰대 기출문제를 수록하여 특례기출 유형에서 다룰 수 없었던 출제 가능한 고난도 유형과 새로운 유형 등을 담았습니다.

154 2018학년도 동국대

자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 $f(n)$이라 하자.

㉠ $\log_2 a - 2\log_2 b = n$
㉡ $1 \le a \le 1000$이고 $\log_2 a$는 자연수이다.

$\sum_{n=1}^{3} f(n)$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19

STEP5 정답과 해설

빠른 정답

상세풀이

정확히 알고 있던 문제는 자신의 풀이를 해설과 비교하며 완벽히 익혀서 피드백 학습이 될 수 있도록 합니다.
틀린 문제나 모르는 문제는 관련된 절대개념과matanza tip을 통해서 자신의 약점을 파악하고 보완할 수 있도록 합니다.

다른 풀이

실전에서 필요한 다양한 풀이를 제공하였습니다.

절대 개념

용어의 정의와 활용, 문제 해결의 팁, 복습에 필요한 절대개념 등을 설명하였습니다.

124 정답 ③

현재의 인구의 수를 A라면 n년 후의 인구수는
$A \times 1.03^n$이다.
$A \times 1.03^n \ge 3A$, $1.03^n \ge 3$에서 양변 로그를 취하면
$n \log 1.03 \ge \log 3$, $\therefore n \ge \frac{0.4771}{0.0128} \fallingdotseq 37.27$
따라서 38년 후부터 현재의 인구의 수의 3배 이상이 된다.

절대개념

- 등비수열의 합
  첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ (단, $r \ne 1$)
- 증가율 $r\%$ ➡ 공비가 $1+\frac{r}{100}$인 등비수열

마탄자 특례수학

CONTENTS

수학 1

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

Ⅲ 수 열

정답 및 해설

I

지수함수와 로그함수

특례수학
마란자

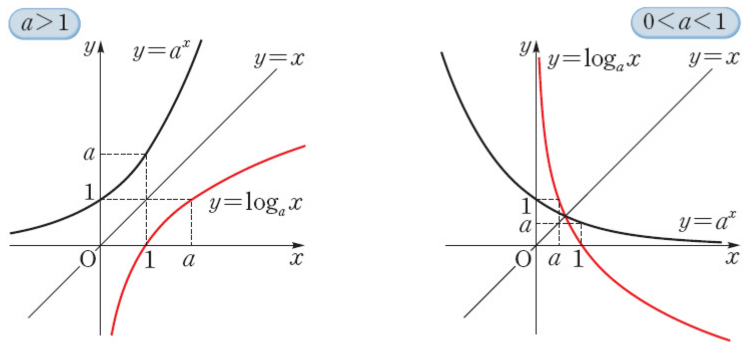
01 개념다시보기

개념 07 로그함수의 그래프

✎ 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 성질

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
② 그래프는 정점$(1, 0)$을 지나고 y축이 점근선이다.
③ $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

➡ 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



✎ 로그함수 $f(x)=\log_a x$의 특징

① 로그의 진수는 양수이어야 하므로 $x>0$
② 임의의 양수 x, y에 대하여 $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(xy)=\log_a xy=\log_a x+\log_a y=f(x)+f(y)$
③ 임의의 양수 x, y에 대하여 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

개념 08 지수 · 로그함수의 평행이동과 대칭이동

✎ 지수함수의 평행이동과 대칭이동

지수함수 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$의 그래프를
① x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=a^{x-m}+n$
② x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-a^x$
③ y축에 대하여 대칭이동하면 $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$
④ 원점에 대하여 대칭이동하면 $y=-a^{-x}=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$

✎ 탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 성질

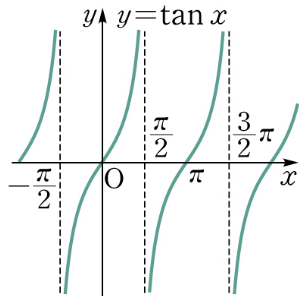
① 정의역은 $\theta\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 점근선은 직선 $\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

③ 주기가 π인 주기함수이다. $\tan(n\pi+x)=\tan x$

④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. $\tan(-x)=-\tan x$

⑤ $y=\tan ax$의 주기는 $\dfrac{\pi}{|a|}$이다.



✎ 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$ $(b\neq0)$의 그래프

함수 $y=a\cos(bx+c)+d$는 함수 $y=a\cos bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 그래프이므로 주기 $\dfrac{2\pi}{|b|}$, 최댓값은 $|a|+d$, 최솟값은 $-|a|+d$이다.

개념 05 삼각함수의 최대. 최소

✎ 삼각함수로 주어진 식의 최대. 최소

① 복잡한 식을 한 종류의 삼각함수로 통일시킨다.
② $\sin x$ (또는 $\cos x$)를 t로 치환한다.
③ 치환하여 반드시 새로운 범위가 생긴다.
④ 그래프를 이용하여 최대, 최소를 구한다.

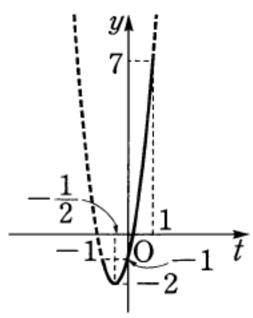
➡ 함수 $y=-4\cos^2x+4\sin x+3$의 최댓값과 최솟값은

$y=-4\cos^2x+4\sin x+3=-4(1-\sin^2x)+4\sin x+3$

$=4\sin^2x+4\sin x-1$에서 $\sin x=t$ $(-1\leq t\leq 1)$로 놓으면

$f(t)=4t^2+4t-1=4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-2$

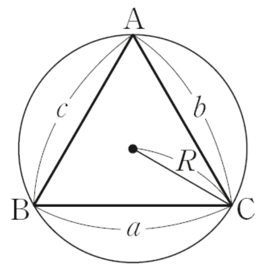
$M=f(1)=7\ m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$



개념 08 사인법칙

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



사인법칙의 변형

① $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

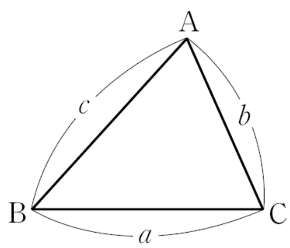
② $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

개념 09 제이 코사인법칙

$\triangle$ABC에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

■ 제이 코사인법칙의 변형 공식.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

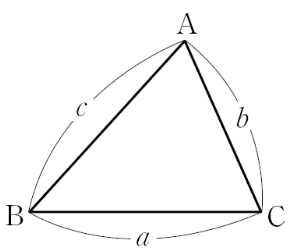


① 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때 나머지 한 변의 길이를 구한다.

② 세 변의 길이가 주어질 때 제이 코사인법칙의 변형 공식을 이용하여 각의 크기를 구한다.

개념 10 삼각형의 넓이

$\triangle$ABC의 넓이를 S라고 하면 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$



개념다시보기

01 개념다시보기

■ 여러 가지 삼각형의 넓이

① $\triangle$ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때

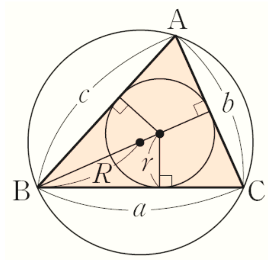
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R},\quad S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

② $\triangle$ABC 의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=rs\ \left(\text{단}, s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

③ 헤론(Heron)의 공식 :

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \left(\text{단}, s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

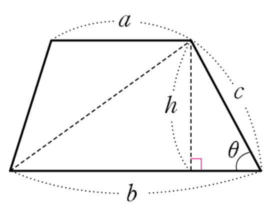


개념 11 사각형의 넓이

① 사다리꼴의 넓이

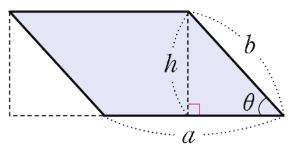
대각선으로 나누면 높이가 같은 두 개의 삼각형이 된다.

$$\therefore S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{1}{2}(a+b)c\sin\theta$$



② 평행사변형의 넓이

평행사변형의 한쪽 부분을 잘라 다른 한쪽에 붙이면 직사각형 모양이 된다. $\therefore S=ah=ab\sin\theta$

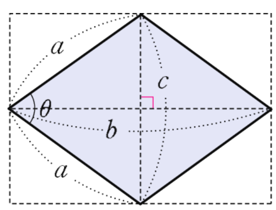


③ 마름모의 넓이

마름모의 두 대각선은 서로 수직 이등분하므로 두 대각선과 평행한 선분을 네 꼭짓점에서 그리면 직사각형이 된다.

또, 마름모의 한 내각의 크기를 θ라고 하면 두 변의 길이가 a인 평행사변형이다

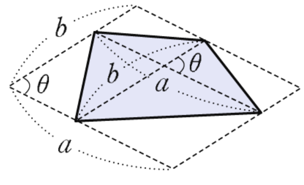
$$\therefore S=\frac{1}{2}bc=a^2\sin\theta$$



④ 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이

두 대각선과 평행한 선분을 네 꼭짓점에서 그리면 평행사변형이 된다.

$$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$



02 개념확인문제

01 호도법

172 2019학년도 동국대

둘레의 길이가 10인 부채꼴 중에서 그 넓이의 최댓값은?

173

부채꼴의 넓이가 S일 때 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값과 그때의 중심각의 크기를 모두 구하여라.

02 삼각함수의 정의와 연산

174 2019학년도 인하대

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때

$\tan(\pi+\theta)+\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

175 2015학년도 이화여대

$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$일 때 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$

176 2016학년도 건국대

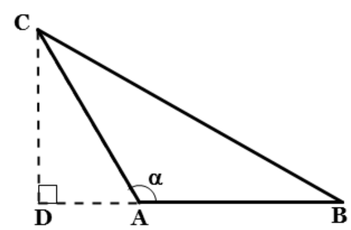
삼각형 ABC의 두 각 A, B에 대하여

$\sin A=\dfrac{1}{4}$, $\tan B=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ 일 때 $\cos C$의 값은?

① $-\dfrac{7}{8}$ ② $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ③ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ④ $\dfrac{1}{2}$

177 2012학년도 성균관대

아래 그림에서와 같이 D는 $\triangle ABC$의 한 변 BA의 연장선상에 있고 $\angle ADC=90^\circ$, $\angle BAC=\alpha$이다.



$\overline{AD}=6(cm)$, $\overline{CD}=8(cm)$ 일 때, $\cos\alpha$의 값은?

① $-\dfrac{4}{5}$ ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$

④ $-\dfrac{3}{5}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

253 2019학년도 인하대

$10\times10+11\times9+12\times8+\cdots+19\times1$의 값은?

① 695 ② 705 ③ 715 ④ 725 ⑤ 735

254 2019학년도 숙명여대

$\sum_{n=1}^{98}\log_{10}\frac{n+2}{n}$의 값은?

① $\log_{10}(50\times98)$ ② $\log_{10}(50\times99)$
③ $\log_{10}(50\times100)$ ④ $\log_{10}(50\times101)$
⑤ $\log_{10}(50\times102)$

255 2016학년도 건국대

다음 식의 값은?

$$\sum_{n=1}^{8}\left|\sqrt{19}-n\right|$$
$$=\left|\sqrt{19}-1\right|+\left|\sqrt{19}-2\right|+\cdots+\left|\sqrt{19}-8\right|$$

① $-36+8\sqrt{19}$ ② $6-2\sqrt{19}$
③ 16 ④ $26+2\sqrt{19}$

256

$\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{m=1}^{n}mn\right)$의 값을 구하여라.

257

수열의 합
$1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots(1+3+5+\cdots+15)$을
구하여라.

05 분수 꼴인 수열의 합

258 2019학년도 아주대

다음 수열의 첫째항부터 제100항까지의 합은?

$$\frac{1}{1\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot7},\ \frac{1}{7\cdot9},\ \cdots$$

① 1 ② $\frac{99}{199}$ ③ $\frac{100}{201}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

02 개념확인문제

07 S_n이 포함된 점화식

271 2019학년도 단국대

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n(n+1)(n+2)$일 때

$\sum_{k=1}^{10} \frac{99}{a_k}$의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30

272 2019학년도 동국대

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) = n^2$을 만족시킬 때 $\sum_{k=1}^{12} a_k$의 값은?

① 9 ② 16 ③ 25 ④ 36

273

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이 성립할 때, $a_{10} - a_8$의 값을 구하여라.

274

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항가지의 합을 S_n이라 하면

$S_1 = 1,\ S_{n+1} = 2S_n + 3\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이 성립한다. 이때 a_9의 값은?

03 반복되는 수열의 합

275 2020학년도 건국대

4^n의 일의 자리 숫자를 a_n이라 할 때 $\sum_{n=1}^{31} a_n$의 값은?

① 154 ② 160 ③ 174 ④ 180

276 2015학년도 이화여대

귀납적으로 정의된 다음 수열의 Z_{2015}를 구하시오.

$$Z_1 = 0,\ \ Z_{n+1} = (Z_n)^2 + i$$

이때, i는 허수단위 $\sqrt{-1}$ 이다.

① 1 ② i

③ $-1+i$ ④ $2015+i$

03 특례기출유형

유형 01 등차수열

✎ 등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n

$a_n = a+(n-1)d$

✎ 등차수열의 점화식 : 이웃하는 항 사이의 관계

① $a_{n+1} = a_n + d$ ② $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

✎ 등차중항

① a, x, b 등차수열 ➡ $x = \dfrac{a+b}{2}$

② a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 등차수열 ➡ $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

282 2018학년도 국민대

200 이하의 자연수 중에서 5로 나누어 3이 남는 수들의 합은?

① 4010 ② 4020 ③ 4030 ④ 4040

283 2018학년도 동국대

공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족할 때, a_2의 값은?

① $a_6 + a_8 = 0$ ② $|a_6| = |a_7| + 3$

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20

284 2014학년도 고려대

등차수열 3, a_2, a_3, $\cdots$, a_{n-1}, 43의 합이 253일 때 a_4의 값을 구하시오.

285 2018학년도 한양대 에리카

빗변의 길이가 5인 직각삼각형의 세 변의 길이가 등차수열의 연속한 세 항을 이룰 때 이 직각삼각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 10 ④ 12

286 2014학년도 고려대

삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + x + a = 0$의 세 근이 등차수열을 이룰 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2

03 특례기출유형

유형 05 자연수의 거듭제곱의 합

✎ 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc$

② $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

302 2018학년도 인하대

$1 \times 30 + 2 \times 29 + 3 \times 28 + \cdots + 29 \times 2 + 30 \times 1$의 값은?

① 4960 ② 4970 ③ 4980
④ 4990 ⑤ 5000

303 2014학년도 이화여대

$\sum_{k=1}^{2014} \sum_{i=k}^{2014} (-1)^i$의 값을 구하시오.

① 2014 ② 1007
③ -1007 ④ -2014

304 2016학년도 단국대

$\sum_{k=1}^{5} \left[\frac{10}{k}\right]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23

305 2016학년도 숙명여대

$\sum_{k=1}^{12} k(k+1) + \sum_{k=2}^{12} k(k+1) + \sum_{k=3}^{12} k(k+1) +$
$+ \cdots + \sum_{k=12}^{12} k(k+1)$의 값을 구하여라.

① 6732 ② 6733 ③ 6734
④ 6735 ⑤ 6736

306 2017학년도 동국대

다음 합을 구하시오.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 99^2$$

① 33330 ② 55550
③ 83325 ④ 166650

03 특례기출유형

유형 07 점화식

✎ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴의 점화식

➡ n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하여 얻은 식을 변끼리 더해서 a_n을 구한다.

✎ $a_{n+1}=f(n)\times a_n$의 꼴의 점화식

➡ n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하여 얻은 식을 변끼리 곱해서 a_n을 구한다.

✎ $a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1)$의 꼴의 점화식

➡ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$으로 변형하면 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p 인 등비수열이므로 $a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$

이 때 $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$이다.

312 2019학년도 홍익대

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=15$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$을 만족한다. $a_9-a_{11}=8$일 때 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$가 최대가 되는 n의 값을 구하시오.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7

313 2019학년도 숙명여대

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n+3$을 만족시킬 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_{3k}-a_k)$의 값은?

① 55 ② 110 ③ 165 ④ 255 ⑤ 330

314 2019학년도 중앙대

$a_1=e^2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}^2=a_n\,a_{n+2}$를 만족한다.
$a_1\times a_2\times\ \cdots\ \times a_{10}=e^{110}$일 때 a_{50}의 값은?
(단, e는 자연로그의 밑이다)

① e^{50} ② e^{51} ③ e^{100} ④ e^{110}

315 2018학년도 건국대

수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 귀납적으로 정의될 때, a_{100}의 값은?

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{n}{(n+2)a_n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

① $\dfrac{99}{101}$ ② $\dfrac{100}{101}$ ③ 1 ④ $\dfrac{102}{101}$

316

2016학년도 이화여대

$a_1 = 2$이며 수렴하는 수열$\{a_n\}$이 존재한다. 자연수 n에 대하여 이차함수 $f(x) = x^2 - 2\sqrt{a_n}\,x + 2a_{n+1} - 1$의 최솟값이 항상 0이 될 때, a_{100}의 값을 구하시오.

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{99} + 1$　② $\left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 1$

③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 1$　④ $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} - 1$

317

2016학년도 경희대

다음과 같이 정의된 수열 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$의 일반항을 $a_n = ab^{n-1} + c$로 나타냈을 때, 세 수의 합 $a + b + c$는?

① 3　② 4　③ 5　④ 6

318

2014학년도 한양대

등차수열 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$의 각 항과 공차가 0이 아닐 때, 이차방정식 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$은 중근을 갖는다. 이 중근은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2

319

2018학년도 인하대

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - a_n$을 만족한다. $a_5 = 1,\ a_6 = 2$일 때, a_1의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

320

2019학년도 숙명여대

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$2a_{n+1} + \dfrac{1}{2a_n - 1} = 0$을 만족시킬 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은?

① $\frac{11}{2}$　② 6　③ $\frac{13}{2}$　④ 7　⑤ $\frac{15}{2}$

04 지필발전문제

339 2019학년도 한양대 모의

$\sum_{n=0}^{2019} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4 \cdot 1010}\right)$의 값은?

① $\frac{2017}{2}$ ② 1009 ③ $\frac{2019}{2}$

④ 1010 ⑤ $\frac{2021}{2}$

340 2019학년도 건국대

첫째 항이 1이고 공비가 2인 등비수열의 첫째 항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $1 \le n \le 50$에 대하여 S_{n+1}이 합성수가 되는 가장 큰 n은?

① 47 ② 48 ③ 49 ④ 50

341 2017학년도 숙명여대

100 이하의 자연수 중 양의 약수의 개수가 홀수 개인 자연수 전체의 합을 S라고 할 때, $\frac{S}{5}$의 값은?

① 77 ② 110 ③ 210 ④ 231 ⑤ 835

342 2018학년도 건국대

$1, 2, 3, \cdots, 10$이 적힌 10장의 카드가 쌓여 있는데 카드에 적힌 수의 값이 작은 것이 위에 오도록 쌓여 있다. 이 카드 묶음에서 맨 위에 있는 카드를 맨 아래로 내리고, 그 후 맨 위에 놓이게 되는 카드를 버리는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 맨 마지막에 남게 되는 카드에 적힌 숫자는?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7

343 2013학년도 성균관대

함수 f가 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족한다고 하자.

$f(x)+(1+x)f(2-x)=-x(2-2x)$

이때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{f(n^2+n+1)}$의 값은?

① $-20/11$ ② $-10/11$ ③ $-5/11$

④ $-11/10$ ⑤ $22/10$

344 2015학년도 한양대

$a_1 = \dfrac{1}{4}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2-3a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$으로 정의되는 수열 a_n이 $a_n > \dfrac{1}{978}$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10

345 2016학년도 한양대

초항이 $\dfrac{1}{2}$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열 $\{x_n\}$과 초항이 -12, 공차가 3인 등차수열 $\{y_n\}$이 있다.

수열 $\{z_n\}$이 $z_n = x_n^{y_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$을 만족할 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log_2 z_k$의 최댓값은?

① 12 ② 48 ③ 60 ④ 80

346 2016학년도 한양대

부등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2} \le \frac{18}{13}$을 만족하는 n의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9

347 2015학년도 고려대

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 $(4-a_{n+1})(2+a_n) = 8$을 만족할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은?

① $6-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$ ② $6+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

③ $6-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}$ ④ $6+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}$

04 지필발전문제

348 2016학년도 고려대

이차방정식 $x^2+4x-(4n^2-1)=0$의 두 근 a_n, b_n에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)$의 값을 구하면?

① $\frac{20}{21}$ ② $\frac{31}{21}$ ③ $\frac{40}{21}$ ④ $\frac{41}{21}$

349 2017학년도 건국대

다음을 만족하는 점 $P(x,\ y)$의 개수는?

가. x, y는 모두 정수이다.
나. $0 \le x \le 100$
다. $0 \le y \le \sqrt{x}$

---

① 614 ② 615 ③ 725 ④ 726

350 2018학년도 수능기출

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_7의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

351 2018학년도 9월 모의수능

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1=a_2=1$, $b_1=k$이고,
모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$, $b_{n+1}=a_n-b_n+n$을 만족시킨다. $b_{20}=14$일 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

➤ 빠른 정답

Ⅰ 지수함수와 로그함수

STEP 01 개념확인문제

001. ①	002. ④	003. ①	004. ①	005. ④	006. ③	007. ②	008. ③	009. ③	010. ④
011. ③	012. ①	013. ②	014. ④	015. ②	016. ④	017. ④	018. ③	019. ①	020. ①
021. ②	022. ③	023. ③	024. ④	025. ③	026. ③	027. ②	028. ②	029. ①	030. ③
031. ③	032. ④	033. ②	034. ③	035. ②	036. ②	037. ④	038. ①	039. 해설	040. 해설
041. 해설	042. ④	043. ②	044. ②	045. 114	046. 92	047. 123	048. ③	049. ④	050. 7.7
051. ④	052. 9	053. ②	054. ④	055. ④	056. ③	057. ④	058. ④	059. ②	069. ③
061. 20/3	062. 해설	063. 2	064. ②③	065. 해설	066. 해설	067. 해설	068. 2	069. ②	070. ④
071. ③	072. ①	073. ③	074. ④	075. 6/5	076. $6\sqrt{3}$	077. 4	078. 0	079. 5	080. 0
081. 4	082. 1/10	083. 19	084. -1	085. 225	086. ①	087.해설	088. 3	089. ①	090. ①
091. ④	092. ④	093. ③	094. ②	095. ③	096. 13	097.$2\sqrt{2}$			

STEP 02 특례기출유형

							098. ①	099. ①	100. ④
101. ①	102. ⑤	103. ④	104. ①	105. ①	106. ④	107. ③	108. ④	109. ①	110. ③
111. ①	112. ①	113. ②	114. ④	115. ③	116. ④	117. ②	118. ①	119. ⑤	120. ③
121. ②	122. ④	123. ③	124. ③	125. ④	126. 2	127. 4	128. ④	129. 3	130. ②
131. ①	132. ①	133. ①	134. ②	135. ①	136. ①	137. ④	138. ③	139. ①	140. ③
141. ④	142. ④	143. ④	144. ③	145. ①	146. 8	147. ④	148. 36	149. ②	150. ①
151. 42	152. ④								

STEP 03 지필발전문제

		153. ①	154. ①	155. ③	156. ⑤	157. ④	158. ①	159. ③	160. ④
161. 143	162. 12	163. 16	164. ①	165. ③	166. ③	167. 해설	168. 1	169. 3	170. 5
171. 56									

Ⅱ 삼각함수

STEP 01 개념확인문제

	172. 25/4	173. 해설	174. ①	175. ②	176. ①	177. ④	178. ③	179. ④	180. ③
181. ③	182. ①	183. ②	184. 0	185. 5	186. ②	187. 2	188. -6	189. ⑤	190. ③
191. ③	192. ④	193. ③	194. ①	195. ④	196. 7	197. 5	198. -2	199. 1	200. π
201. 2	202. ③	203. 1/4	204. ①	205. ③	206. 16	207. ③	208. ④		

01. 개념확인문제

01 정답 ①

-64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -4,
음의 실수의 n제곱근 중에 실수가 있는 경우는 n이 홀수일 때이다.

02 정답 ④

$a=1^0=1$, $b=0^1=0$이므로
(가) $a+b=1$ (참)
(나) $a\times b=0$ (참)
(다) $a>b$ (참)
(라) $a^b=1^0=1$ (참)
따라서 옳은 식의 개수는 4개이다.

03 정답 ①

지수법칙을 이용하면

$$\left\{\left(\frac{27}{8}\right)^{0.25}\right\}^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times0.25\times(-\frac{2}{3})}=\left(\frac{3}{2}\right)^{(-\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

04 정답 ①

$$8^{\frac{2}{3}}\times16^{-\frac{3}{2}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}\times(2^4)^{-\frac{3}{2}}=2^2\times2^{-6}=2^{-4}=\frac{1}{16}$$

05 정답 ④

$\sqrt{81^{-3}}=81^{-\frac{3}{2}}=9^{-3}$이므로
$9^{-\frac{3}{2}}\times16^{\frac{1}{4}}\div\sqrt{81^{-3}}=3^{-3}\times2\times3^6=3^3\times2$이다.

06 정답 ③

주어진 식에서 $288=2^5\times3^2$이므로

$$3^{\frac{1}{3}}\div2^{\frac{2}{3}}\times288^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{2}{3}}\times2^{\frac{5}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}$$
$$=2^{\frac{3}{3}}\times3^{\frac{3}{3}}=6$$이다.

07 정답 ②

$$6\times64^{-\frac{1}{4}}=2\times3\times(2^6)^{-\frac{1}{4}}=3\times2^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

08 정답 ③

$56^a=8$에서 $a=\log_{56}8$이고 $7^b=16$에서 $b=\log_7 16$이다.

$$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}=3\log_8 56-4\log_{16}7$$
$$=\log_2 56-\log_2 7=\log_2 8=3$$

09 정답 ③

$2^x=24$, $x=\log_2 24$이고 $3^y=24$, $y=\log_3 24$이다.

$$xy-x-3y+3=(x-3)(y-1)$$
$$=(\log_2 24-3)(\log_3 24-1)$$
$$=\log_2 3\times\log_3 8=\log_2 8=3$$

10 정답 ④

$6^{ab}=(2\cdot3)^{ab}=2^{ab}\cdot3^{ab}$에서
$(2^a)^b(3^b)^a=3^b\times4^a=4\times9=36$이다.
$\therefore 6^{ab}=36$

11 정답 ③

$3^x=4^y=12^z=k$라 하면
$3=k^{\frac{1}{x}}$, $4=k^{\frac{1}{y}}$, $12=k^{\frac{1}{z}}$에서 $12=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{z}}$이므로
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$이고, 식 양변을 xyz를 곱하면
$yz+zx=xy$이다.
$\therefore xy-yz-zx=0$

다른 풀이

$3^x=4^y=12^z=k$라 하면
$x=\log_3 k,\ y=\log_4 k,\ z=\log_{12} k$이다.

따라서 $xy-yz-zx=xyz\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$

$=xyz(\log_k 12-\log_k 3-\log_k 4)$

$=xyz\left(\log_k \frac{12}{3\times 4}\right)=0$이다.

12

정답 ①

$2^x=5^y=10^z=k$라 하면 $x=\log_2 k,\ \ y=\log_5 k,$
$z=\log_{10} k$이다.

$\therefore\ xy-yz-zx+1=xyz\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+1$

$=xyz(\log_k 10-\log_k 2-\log_k 5)+1$

$=xyz(\log 1)+1=1$

13

정답 ②

$a=\log_2 100=\frac{\log 100}{\log 2},\ \ b=\log_5 100=\frac{\log 100}{\log 5}$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\log 2}{\log 100}+\frac{\log 5}{\log 100}=\frac{\log 10}{2\log 10}=\frac{1}{2}$

14

정답 ④

$\frac{(3^a-3^{-a})3^a}{(3^a+3^{-a})3^a}=\frac{3^{2a}-1}{3^{2a}+1}=\frac{9^a-1}{9^a+1}=\frac{1}{3}$에서

$3\cdot 9^a-3=9^a+1$이므로 $9^a=2,\ \ 9^{-a}=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ 9^a-9^{-a}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

15

정답 ②

$4^y=2^{2y}=(2^y)^2=5$이므로 $2^y=\sqrt{5}$이다.

$8^{x-y}=8^x\times 8^{-y}=(2^x)^3\times(2^y)^{-3}$

$=3^3\times(\sqrt{5})^{-3}=\frac{27}{5\sqrt{5}}=\frac{27\sqrt{5}}{25}$

16

정답 ④

$x+\frac{1}{2x}=2$에서

$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2x}\right)^2-4\times x\times\frac{1}{2x}$

$=2^2-2=2$에서 $x-\frac{1}{2x}=\pm\sqrt{2}$이다.

$x>1$일 때 $x-\frac{1}{2x}>0$이므로 $x-\frac{1}{2x}=\sqrt{2}$이다.

$\therefore\ x^2-\frac{1}{4}x^{-2}$

$=x^2-\frac{1}{4x^2}=\left(x+\frac{1}{2x}\right)\left(x-\frac{1}{2x}\right)=2\sqrt{2}$

17

정답 ④

방정식 $\log_a b-3\log_b a=2$에서 $\log_a b=t$라 하면 $t>0$이다.

방정식 $t-\frac{3}{t}=2,\ t^2-2t-3=0,\ \ t=3,\ -1$이다.

$t>0$이므로 $\log_a b=3,\ b=a^3$이다.

$\log_a \sqrt[3]{b\sqrt{a}}=\log_a\left(b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}\right)=\log_a\left(a^{\frac{7}{6}}\right)=\frac{7}{6}$

18

정답 ③

$\log_2\frac{2}{3}+2\log_2\sqrt{48}=1-\log_2 3+\log_2(16\times 3)$

$=1-\log_2 3+4+\log_2 3=5$

19

정답 ①

$162=2\times 3^4$ 이므로

$\frac{3}{2}\log_3\frac{1}{2}-\log_3\sqrt{162}+\log_{\sqrt{3}}2$

$=-\frac{3}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3(2\times 3^4)+2\log_3 2$

$=-\frac{3}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 2-2+2\log_3 2=-2$

02. 특례기출유형

98 정답 ①

$\sqrt{16}=4$의 음의 제곱근 $a=-2$이고,
$(-5)^2=25$의 양의 제곱근 $b=5$이다.
따라서 $a-b=-7$

99 정답 ①

$3^x=5^y=15^z=k$라 하면 $x=\log_3 k=\dfrac{1}{\log_k 3}$

$y=\log_5 k=\dfrac{1}{\log_k 5}$

$z=\log_{15} k=\dfrac{1}{\log_k 15}=\dfrac{1}{\log_k 3+\log_k 5}$

$$\frac{(x+y)z}{xy}=\frac{\left(\dfrac{1}{\log_k 3}+\dfrac{1}{\log_k 5}\right)\left(\dfrac{1}{\log_k 3+\log_k 5}\right)}{\dfrac{1}{\log_k 3\log_k 5}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\log_k 3+\log_k 5}{\log_k 3\log_k 5}\right)\left(\dfrac{1}{\log_k 3+\log_k 5}\right)}{\dfrac{1}{\log_k 3\log_k 5}}=1$$

다른 풀이

$3^x=15^z$에서 양변 $\dfrac{1}{x}$제곱하면 $3=15^{\frac{z}{x}}$ …①

$5^y=15^z$에서 양변 $\dfrac{1}{y}$제곱하면 $5=15^{\frac{z}{y}}$ …②

①×②이면 $3\times5=15^{\frac{z}{x}}\times15^{\frac{z}{y}}=15^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}$

$\therefore\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}=1$

따라서 $\dfrac{(x+y)z}{xy}=\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}=1$

100 정답 ④

$x=\dfrac{3}{(\sqrt[8]{7}+1)(\sqrt[4]{7}+1)(\sqrt{7}+1)}$의 분모와 분자에
$\sqrt[8]{7}-1$을 곱하면 분모는
$(\sqrt[8]{7}-1)(\sqrt[8]{7}+1)(\sqrt[4]{7}+1)(\sqrt{7}+1)$
$=(\sqrt[4]{7}-1)(\sqrt[4]{7}+1)(\sqrt{7}+1)$
$=(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)=7-1=6$이다.

따라서 $x=\dfrac{\sqrt[8]{7}-1}{2}$이므로 $(2x+1)^{16}=\left(\sqrt[8]{7}\right)^{16}=49$

101 정답 ①

ㄱ. a의 부호에 관계없이 $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$이므로
$a<0$이면 $\sqrt[2n]{a^{2n}}=-a$
ㄴ. 반례 : $n=3$일 때 $a=-8,\ b=8$이라면
$\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{-8}\ \sqrt[3]{8}=-2\times2=-4$
$\sqrt[3]{-ab}=\sqrt[3]{64}=4$이므로 성립하지 않는다.
ㄷ. 반례 : $n=3$일 때 $a=-8,\ b=-8$이라면
$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{-8\sqrt[3]{-8}}=\sqrt[3]{16}$
$(-a)^{\frac{1}{n}}(b)^{\frac{1}{n^2}}=(8)^{\frac{1}{3}}(-8)^{\frac{1}{9}}=2\sqrt[9]{-8}$이다.
두 수는 양수와 음수로서 같을 수 없다.

※ 일반적으로 지수가 정수가 아닌 유리수인 경우에 밑이 음수이면 지수법칙을 적용할 수 없다.

102 정답 ⑤

① $(30)^x=3$의 양변에 로그를 취하면
$x(\log3+1)=\log3$에서 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{\log3+1}{\log3}$
② $(10)^{-y}=9$의 양변에 로그를 취하면
$-y=2\log3$에서 $\dfrac{2}{y}=-\dfrac{1}{\log3}$
③ $a^{3z}=3$의 양변에 로그를 취하면
$3z\log a=\log3$에서 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{3\log a}{\log3}$이다.
그러므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log3+1}{\log3}-\dfrac{1}{\log3}+\dfrac{3\log a}{\log3}=7$,
$\dfrac{\log a}{\log3}=2$이다.
$\therefore a=9$

103 정답 ④

$A=\sqrt[3]{20.18}$에서 $\sqrt[3]{8}<A<\sqrt[3]{27}$이므로 $2<A<3$
$B=2^{2.018}$에서 $2^2<B<2^3$이므로 $4<B<8$
$C=\log_{10}2018$에서 $\log_{10}1000<C<\log_{10}10000$이므로
$3<C<4$이다.
따라서 $A<C<B$이다.

228

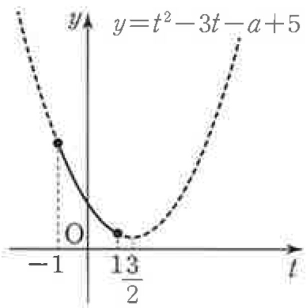
정답 ④

$\cos^2\theta+3\sin x+a-6\le 0$에서

$(1-\sin^2 x)+3\sin x+a-6\le 0$

$\sin^2 x-3\sin x-a+5\ge 0$

이때, $\sin x=t$라 하면 $-1\le x\le 1$이고



주어진 부등식은 $t^2-3t-a+5\ge 0$,

$f(t)=t^2-3t-a+5$라고 하면

$f(t)=t^2-3t-a+5=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-a+\frac{11}{4}$, $-1\le t\le 1$에서

함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값을 가지므로

$f(1)=1-3-a+5\ge 0$이어야 한다.

$\therefore\ a\le 3$

03. 지필발전문제

229

정답 253

함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고

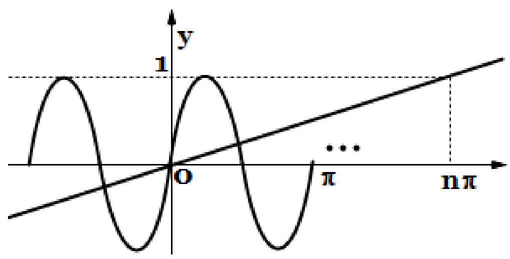
함수 $y=\frac{x}{n\pi}$는 점 $(n\pi,1)$, $(-n\pi,-1)$을 지난다.

$a_1=3$, $a_2=3+4$, $a_3=3+4\times 2$이므로

$a_n=3+4(n-1)=4n-1$이다.

그러므로 $\sum_{n=1}^{11}a_n=\sum_{n=1}^{11}(4n-1)$

$=4\times\frac{11(1+11)}{2}-11=264-11=253$



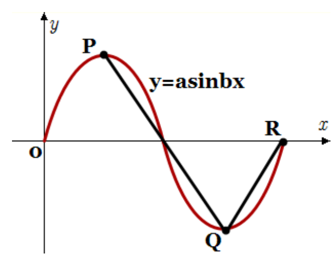
230

정답 ①

함수 $f(x)=a\sin(bx)$의 그래프는 $bx=\frac{\pi}{2}$일 때

최대이다. 최댓값은 $x=\frac{\pi}{2b}$일 때 a이므로 $P(\frac{\pi}{2b},a)$이다.

최솟값은 $x=\frac{3\pi}{2b}$일 때 $-a$이므로 $Q(\frac{3\pi}{2b},-a)$이다. 선분 $\overline{PQ}$과 $\overline{QR}$이 직교하므로 두 직선의 기울기가 곱이 -1이다.



$$\frac{a-(-a)}{\frac{\pi}{2b}-\frac{3\pi}{2b}}\times\frac{0-(-a)}{\frac{2\pi}{b}-\frac{3\pi}{b}}=-1\text{에서 } a^2b^2=\frac{\pi^2}{4}\text{이다.}$$

이 때 a^2+b^2의 최솟값은 $a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}$

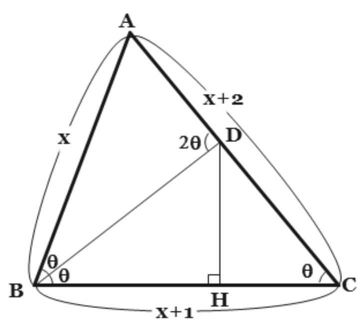
$=2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}=\pi$이다. 단, 등호는 $a=b=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때 성립한다.

231 정답 ②

원 $x^2+y^2=2$에서 $x+y=k$와 만날 때의 k의 범위는 원과 직선이 접할 조건에서 구하면 $-2 \le k \le 2$이다.
$\sin(x+y)=\sin k=t$의 그래프에서
$k=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=\sin(x+y)=\sin k$의 최댓값은 1이다.

232 정답 3/4

각 $\angle B$를 이등분하는 직선이 선분 AC와 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{CD}=a$라 하면 삼각형 DBC는 이등변삼각형이므로
$\overline{BD}=a$이다.
$\angle ADB=2\theta$이므로 삼각형 ABC와 삼각형 ADB는 닮음이다.



따라서 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{AB}$에서
$x:x+2-a=x+1:a=x+2:x$
$x+1:a=x+2:x$에서 $a=\frac{x^2+x}{x+2}$ …… ㉠
$x:x+2-a=x+2:x$에서
$x^2=(x+2-a)(x+2)=(x+2)^2-(x^2+x)$ ($\because$ ㉠)
$=3x+4 \therefore\ x=4$ ($\because\ x>0$)
$\therefore\ a=\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{10}{3}$
점 H는 선분 BC의 중점이므로 $\overline{CH}=\frac{x+1}{2}=\frac{5}{2}$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{CD}}{\overline{CH}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{10}{3}}=\frac{3}{4}$$

233 정답 40

$\angle \mathrm{OPB}=\alpha$, $\angle \mathrm{OPA}=\beta$라 하면
$\tan\alpha=\frac{80}{y}$, $\tan\beta=\frac{20}{y}$
$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{60y}{y^2+1600}$
이 때, $y>0$이므로 분모와 분자를 y로 나누면

$$\tan\theta=\frac{60y\cdot\frac{1}{y}}{(y^2+1600)\frac{1}{y}}=\frac{60}{y+\frac{1600}{y}}$$

그런데 분자의 값이 60으로 고정되어 있으므로 $\tan\theta$의 값이 최대가 되려면 (분모)$=y+\frac{1600}{y}$의 값이 최소가 되어야 한다.
$y>0$일 때, $\frac{1600}{y}>0$ 이므로 산술 · 기하평균의 관계에 의해 $y+\frac{1600}{y}\ge 2\sqrt{y\times\frac{1600}{y}}$ 이고 등호는 $y=\frac{1600}{y}$일 때 성립하므로 $y^2=1600$ $\therefore y=40$
따라서 구하고자 하는 y는 40이다.

234 정답 20

$y=a\cos^2x+a\sin x+b=a(1-\sin^2x)+a\sin x+b$에서
$\sin x=t$라 치환하면
$y=f(t)=-at^2+at+a+b$, $y'=-2at+a=0$에서
① $a>0$인 경우
$t=\frac{1}{2}$에서 최대, $t=-1$에서 최솟값을 갖는다.
$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a+a+b=\frac{5}{4}a+b=10$
$f(-1)=-a-a+a+b=1$두식을 연립하면
$a=4$, $b=5$
② $a<0$인 경우
$t=\frac{1}{2}$에서 최소, $t=-1$에서 최댓값을 갖는다.
$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a+a+b=\frac{5}{4}a+b=1$
$f(-1)=-a-a+a+b=10$
두 식을 연립하면 $a=-4$, $b=6$
그러므로 양수 ab의 값은 20이다.

마킹러 Tip

‣ 자연수 N을 소인수 분해하면 $N=a^pb^q$ (단, a와 b는 소수)

• N의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)$개

➡ a^p의 약수는 $1,\ a,\ a^2, \cdots,\ a^p$ 와 b^q의 약수는 $1,\ b,\ b^2, \cdots,\ b^q$를 표로 나타내면 아래와 같다.

$\times$	1	a	a^2	$\cdots$	a^p
1	1	a	a^2	$\cdots$	a^p
b	b	ab	a^2b	$\cdots$	a^pb
b^2	b^2	ab^2	a^2b^2	$\cdots$	a^pb^2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
b^q	b^q	ab^q	a^2b^q	$\cdots$	a^pb^q

a^p의 약수 개수는 $p+1$개, b^q의 약수 개수는 $q+1$개 표에서처럼 하나씩 뽑아서 서로 곱한 수들은 $N=a^pb^q$의 약수이다.

• N의 양의 약수의 총합

$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)$

$=\dfrac{a^{p+1}-1}{a-1}\times\dfrac{b^{q-1}-1}{b-1}$

각 항은 첫째항이 1이고 공비가 각각 $a,\ b$이고 항수가 각각 $p+1,\ q+1$인 등비수열의 합이다.

342 정답 ③

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$이 적힌 10장의 카드에서 $1, 3, 5, 7, 9$은 아래로 내려지고 $2, 4, 6, 8, 10$은 버린다. 남은 카드는 $1, 3, 5, 7, 9$가 차례로 쌓여 있다. 다시 $1, 5$는 아래로 내리고 $3, 7$은 버린다. 남은 카드는 $9, 1, 5$이다. 1을 버리면 $5, 9$ 순으로 쌓여 있고 마지막에 남게 되는 카드에 적힌 숫자는 5이다.

343 정답 ③

함수 f가 n차 다항식이면 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots$ 이다.

다항식 $f(x)+(1+x)f(2-x)$의 최고차수 항은 $a(-1)^nx^{n+1}$이고 우변의 $2x^2$과 같다.

그러므로 $a(-1)^nx^{n+1}=2x^2$에서 $a=-2,\ n=1$이다.

$f(x)=-2x+b$라 하면

$f(x)+(1+x)f(2-x)$

$=-2x+b+(1+x)(2x+b-4)=2x^2+(b-4)x+2b-4$

$=2x^2-2x$를 만족하는 $b=2$이다.

그러므로 $f(x)=-2x+2$이고,

$f(n^2+n+1)=-2(n^2+n+1)+2=-2n(n+1)$이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{f(n^2+n+1)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{11}\right)=-\frac{5}{11}$

344 정답 ④

점화식 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2-3a_n}$의 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2-3a_n}{a_n}=\dfrac{2}{a_n}-3$

이 때 $\dfrac{1}{a_n}=b_n$이라면 $b_{n+1}=2b_n-3$이므로

$b_{n+1}-3=2(b_n-3)$으로 변형된다.

수열 $\{b_n-3\}$은 공비가 2이고 초항이 $b_1-3=1$인 등비수열이다. 그러므로 $b_n-3=2^{n-1}$에서

$b_n=2^{n-1}+3$이고, $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}+3}$이다.

따라서 $a_n>\dfrac{1}{978}$에서 $2^{n-1}<975$를 만족하는 최대 자연수는 $n=10$이다.

345 정답 ③

초항이 $\dfrac{1}{2}$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 일반항

$x_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{-n}$

초항이 -12, 공차가 3인 등차수열의 일반항

$y_n=-12+(n-1)\times3=3n-15$

수열 $z_n=x_n^{y_n}=(2^{-n})^{3n-15}=2^{-3n^2+15n}$이므로

$\log_2 z_k=-3k^2+15k$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_2 z_k=\sum_{k=1}^{n}(15k-3k^2)$의 최댓값은 $-3n^2+15n$이 음이 아닌 값이 나오는 $n=5$일 때이다.

그러므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(15k-3k^2)=60$

346

정답 ①

부등식에서 분모는

$1^2+3^2+....+(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$,

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1^2+3^2+...+(2k-1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{k(4k^2-1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4k^2-1}$

$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{3}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$

그러므로 $\frac{3}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\le\frac{18}{13}$에서 $n\le 6$이다.

n의 최댓값은 6이다.

347

정답 ①

$(4-a_{n+1})(2+a_n)=8$을 전개하면

$4a_n-2a_{n+1}-a_n a_{n+1}=0$이고,

양변을 a_na_{n+1}로 나누면 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}$이다.

이 점화식을 변형하면 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2})$이므로

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}\right\}$은 초항이 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

그러므로 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}$, $\frac{1}{a_n}=(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{2}$

$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-(\frac{1}{2})^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\times 10=6-(\frac{1}{2})^{10}$

348

정답 ③

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$a_n+b_n=-4$, $a_n b_n=-(4n^2-1)$이므로

$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{a_n+b_n}{a_n b_n}=\frac{4}{4n^2-1}=\frac{4}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=2\sum_{n=1}^{10}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

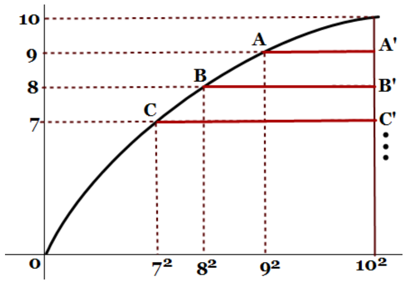
$=2[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{19}-\frac{1}{21})]$

$=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{21})=\frac{40}{21}$

349

정답 ④

부등식 $0\le x\le 100$, $0\le y\le\sqrt{x}$의 영역 안에서의 정수점은 그림에서 실선 위의 점들이다.



$y=0,1,2,\cdots,10$일 때 각각의 x좌표들의 개수를 구한다.

$y=10$일 때 $x=100$이고 개수는 1,

$y=9$일 때 $9^2\le x\le 10^2$이고 개수는 10^2-9^2+1,

$y=8$일 때 $8^2\le x\le 10^2$이고 개수는 10^2-8^2+1,

$y=7$일 때 $7^2\le x\le 10^2$이고 개수는 10^2-7^2+1,

⋮

$y=1$일 때 $1^2\le x\le 10^2$이고 개수는 10^2-1^2+1,

$y=0$일 때 $0\le x\le 10^2$이고 개수는 10^2-0^2+1

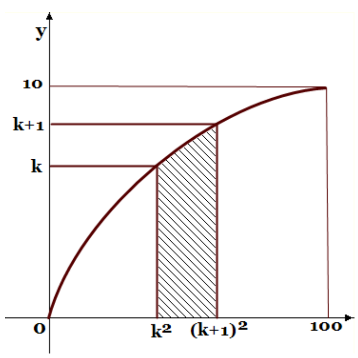
따라서 전체 개수는

$10^2\times 10-(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)+11$

$=1111-\frac{10\times 11\times 21}{6}=726$

다른 풀이

그림에서 빗금 친 $k^2\le x<(k+1)^2$일 때 $y=0,1,\cdots,k$를 갖는다.



즉, $k^2\le x<(k+1)^2$ 일 때 점 $P(x,y)$의 개수는 $\{(k+1)^2-k^2\}(k+1)$

① $0\le x<100$일 때 $k=0,1,2,\cdots,9$를 만족하므로