새로운 출제범위에 따른
특례기출 유형문제집

특례수학

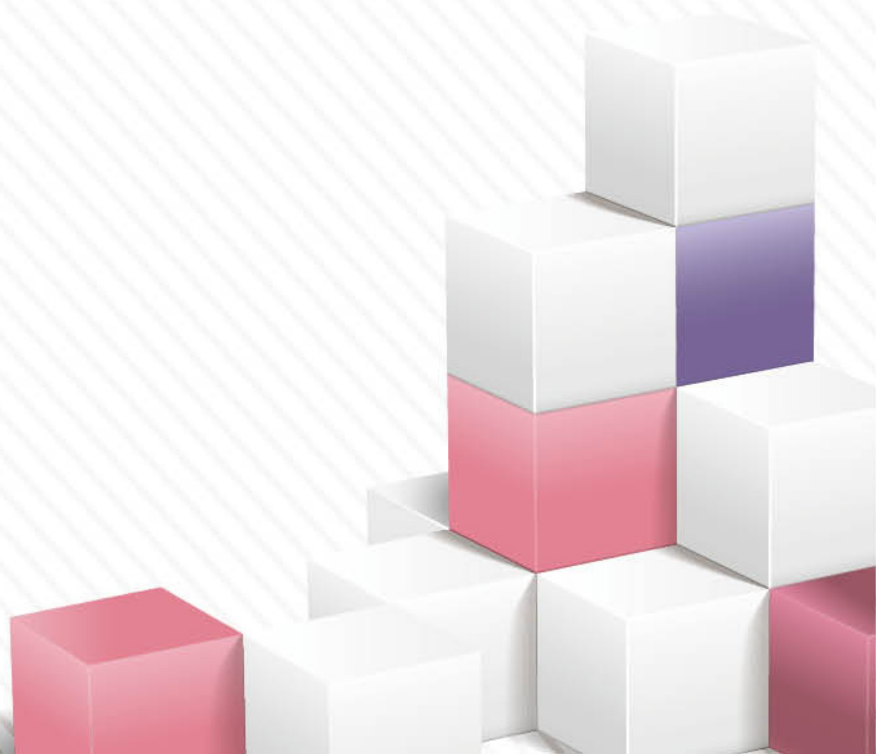
마탄자

수학(상)

송정석 지음

2021학년도 특례전형대비
수학(상)
392제

마탄자특례수학



마탄자

수학은 **사고의질서**이며
논리의표현이다.

특례지필고사 유형문제집을 출간하며

재외국민 특례입시를 준비하는 학생들에게 가장 많이 받는 질문
- 특례 지필시험과 수능문제 중 어느 것이 더 난이도가 높은가?
- 많은 수능 문제집 중에서 어떤 책이 가장 좋은가?
- 선택한 문제집을 어느 정도까지 풀어야 대학별 필기고사에 대비할 수 있는가?

위의 궁금증은 수능과 특례전형 문제가 별개의 것이라고 생각하기 때문에 발생하는데, 수험생들의 공부에 대한 막연함도 여기서 생깁니다. 그러나 특례수학은 사실 수능과 아주 밀접하게 연관되어 있습니다. 특례필기고사의 출제범위가 수능의 출제범위를 따르기 때문입니다. 그럼에도 특례입학전형을 준비하는 학생들의 입장에서는 대학별 전형유형의 다양성, 고등수학 전 범위에 걸친 시험 범위, 익숙하지 않은 대학별 문제구성으로 여태까지의 특례입시준비는 쉽지 않았습니다.

가장 큰 이유는
첫째, 특례 지필시험에 최적화된 풀이과정 학습을 돕는 시스템의 부재
둘째, 수능범위를 응용한 고유한 고난이도 문제의 인식 부족 때문입니다.
그래서 저자는 이 문제점들을 해결하고 학생들의 공부에 대한 막연한 두려움을 해소시키기 위해 본 교재를 집필하게 되었습니다.

그 과정에서는 아래 네 가지를 엄격히 준수했습니다.
첫째, 모든 문제를 바람직한 학습과정인 문제의 개념확인, 대학별 기출유형과 출제될 수 있는 문제를 발전 단계에 맞춰 분류할 것.
둘째, 본 교재의 문제는 모두 특례기출과 수능기출에서 발췌할 것.
셋째, 본 교재의 해설지의 풀이는 모두 특례전형에 최적화될 것.
넷째, 보편적 수능문제 유형과는 다른 특례만의 문제유형과 출제 경향을 모두 담을 것.

이와 같은 지침으로 연구진들과의 약 2년간의 문제분석, 해설지 집필 결과 특례입학 수험생만을 위한 수학 교재가 완성되었다고 말씀드립니다. 이제 여러분의 도약을 위한 발판은 준비되었습니다. 부디 본 교재를 현명하고 성실하게 학습하여 최상의 결과를 얻길 바랍니다.

지은이 송정석

마탄자의 STRUCTURE

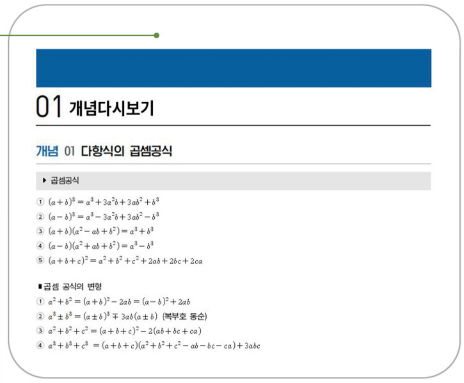
새로운출제범위에따른 특례기출유형문제집

STEP1 개념보기

기본적인 교과서 내용과 특례지필고사에서 많이 출제된 개념들을 간단히 정리합니다. 특히 대학별고사에서 자주 출제되는 내용을 중심으로 구성하였습니다.

마탄자 Tip

문제 해결의 핵심 키워드 또는 접근법 등 실전에 활용할 수 있는 구체적인 문제 해결 방법을 제시하였습니다.



01 개념다시보기

개념 01 다항식의 곱셈공식

▸ 곱셈공식

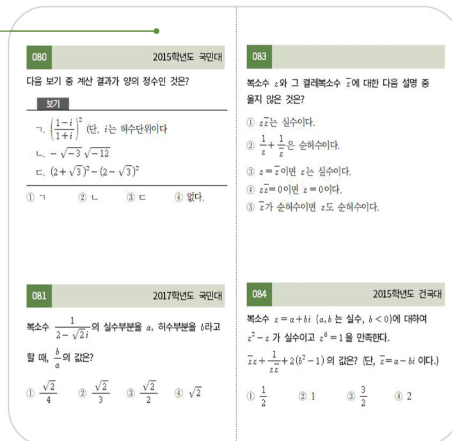
① $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
② $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
④ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

■곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
② $a^3\pm b^3=(a\pm b)^3\mp 3ab(a\pm b)$ (복부호 동순)
③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
④ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

STEP2 개념문제

기본유형의 반복학습으로 중위권 대학문제와 상위권 대학에서 출제되는 개념 문제에 대비할 수 있도록 하였습니다.



080 2015학년도 국민대

다음 보기 중 계산 결과가 양의 정수인 것은?

보기

ㄱ. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ (단, i는 허수단위이다

ㄴ. $-\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

ㄷ. $(2+\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})^2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ 없다.

081 2017학년도 국민대

복소수 $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}i}$의 실수부분을 a, 허수부분을 b라고 할 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$

083

복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $z\bar{z}$는 실수이다.
② $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$은 순허수이다.
③ $z=\bar{z}$이면 z는 실수이다.
④ $z\bar{z}=0$이면 $z=0$이다.
⑤ $\bar{z}$가 순허수이면 z도 순허수이다.

084 2015학년도 건국대

복소수 $z=a+bi$ (a, b 는 실수, $b<0$)에 대하여 z^2-z 가 실수이고 $z^6=1$ 을 만족한다. $\bar{z}z+\dfrac{1}{\bar{z}z}+2(b^2-1)$ 의 값은? (단, $\bar{z}=a-bi$ 이다.)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2

STEP3 특례기출

1.절대개념

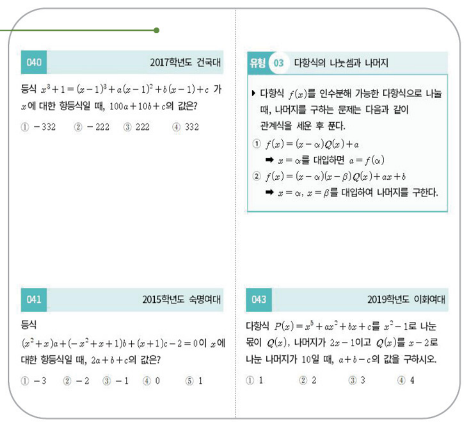
대표문항에서 활용할 수 있고 개념 이해에 도움이 되는 핵심내용을 요약하였습니다.

2.유형별 대표문항

모든 대학의 기출문제를 분석하여 특례지필고사의 출제경향을 담았습니다.

3.유형문제

대표문항과 같은 유형으로 문제를 파악하고 이를 통하여 실전 감각을 키울 수 있도록 합니다.



040 2017학년도 건국대

등식 $x^3+1=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 가 x에 대한 항등식일 때, $100a+10b+c$의 값은?

① -332 ② -222 ③ 222 ④ 332

041 2015학년도 숙명여대

등식
$(x^2+x)a+(-x^2+x+1)b+(x+1)c-2=0$이 x에 대한 항등식일 때, $2a+b+c$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

유형 03 다항식의 나눗셈과 나머지

▸ 다항식 $f(x)$를 인수분해 가능한 다항식으로 나눌 때, 나머지를 구하는 문제는 다음과 같이 관계식을 세운 후 푼다.

① $f(x)=(x-\alpha)Q(x)+a$
➡ $x=\alpha$를 대입하면 $a=f(\alpha)$
② $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b$
➡ $x=\alpha$, $x=\beta$를 대입하여 나머지를 구한다.

043 2019학년도 이화여대

다항식 $P(x)=x^5+ax^2+bx+c$를 x^2-1로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x-1$이고 $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 10일 때, $a+b-c$의 값을 구하시오.

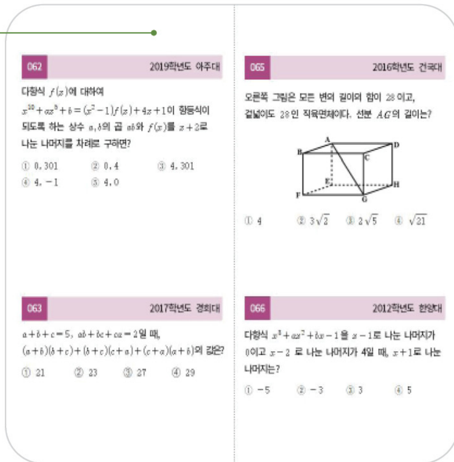
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

마탄자의 STRUCTURE

구성과 학습법, 단계별구성

STEP4 지필발전

지필발전문제로 특례고사 만점에 대비
단원별로 지필고사 유형의 수능기출, 평가원, 사관학교, 경찰대 기출문제를 수록하여 특례기출 유형에서 다룰 수 없었던 출제 가능한 고난도 유형과 새로운 유형 등을 담았습니다.


062 2019학년도 아주대

다항식 $f(x)$에 대하여
$x^{10}+ax^5+b=(x^2-1)f(x)+4x+1$이 항등식이 되도록 하는 상수 a, b의 곱 ab와 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 차례로 구하면?

① 0, 301 ② 0, 4 ③ 4, 301
④ 4, −1 ⑤ 4, 0

065 2016학년도 건국대

오른쪽 그림은 모든 변의 길이의 합이 28이고, 겉넓이도 28인 직육면체이다. 선분 AG의 길이는?

① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{21}$

063 2017학년도 경희대

$a+b+c=5$, $ab+bc+ca=2$일 때,
$(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 27 ④ 29

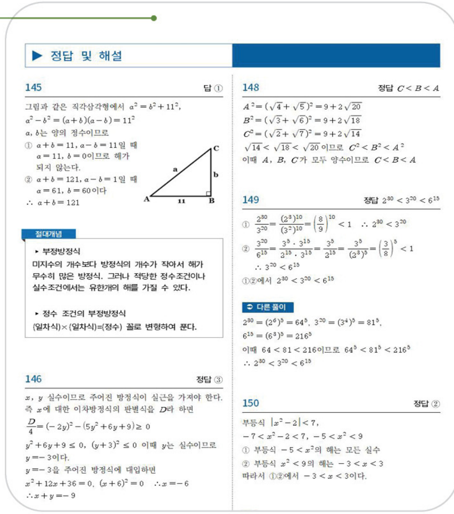
066 2012학년도 한양대

다항식 x^3+ax^2+bx-1을 $x-1$로 나눈 나머지가 0이고 $x-2$로 나눈 나머지가 4일 때, $x+1$로 나눈 나머지는?

① −5 ② −3 ③ 3 ④ 5

STEP5 정답과 해설

빠른 정답
상세풀이
정확히 알고 있던 문제는 자신의 풀이를 해설과 비교하며 완벽히 익혀서 피드백 학습이 될 수 있도록 합니다.
틀린 문제나 모르는 문제는 관련된 절대개념과matanza tip을 통해서 자신의 약점을 파악하고 보완할 수 있도록 합니다.
다른 풀이
실전에서 필요한 다양한 풀이를 제공하였습니다.
절대 개념
용어의 정의와 활용, 문제 해결의 팁, 복습에 필요한 절대개념 등을 설명하였습니다.


▶ 정답 및 해설

145 답 ①

그림과 같은 직각삼각형에서 $a^2=b^2+11^2$,
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=11^2$
a, b는 양의 정수이므로
① $a+b=11, a-b=11$일 때
$a=11, b=0$이므로 해가 되지 않는다.
② $a+b=121, a-b=1$일 때
$a=61, b=60$이다
$\therefore a+b=121$

절대개념
▸ 부정방정식
미지수의 개수보다 방정식의 개수가 작아서 해가 무수히 많은 방정식. 그러나 적당한 정수조건이나 실수조건에서는 유한개의 해를 가질 수 있다.
▸ 정수 조건의 부정방정식
(일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형하여 푼다.

146 정답 ③

x, y 실수이므로 주어진 방정식이 실근을 가져야 한다.
즉 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2y)^2-(5y^2+6y+9)\geq 0$
$y^2+6y+9\leq 0$, $(y+3)^2\leq 0$ 이때 y는 실수이므로 $y=-3$이다.
$y=-3$을 주어진 방정식에 대입하면
$x^2+12x+36=0$, $(x+6)^2=0$ $\therefore x=-6$
$\therefore x+y=-9$

148 정답 $C<B<A$

$A^2=(\sqrt{4}+\sqrt{5})^2=9+2\sqrt{20}$
$B^2=(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=9+2\sqrt{18}$
$C^2=(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2=9+2\sqrt{14}$
$\sqrt{14}<\sqrt{18}<\sqrt{20}$이므로 $C^2<B^2<A^2$
이때 A, B, C가 모두 양수이므로 $C<B<A$

149 정답 $2^{30}<3^{20}<6^{15}$

① $\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}}=\left(\frac{8}{9}\right)^{10}<1$ $\therefore 2^{30}<3^{20}$
② $\frac{3^{20}}{6^{15}}=\frac{3^5\cdot 3^{15}}{2^{15}\cdot 3^{15}}=\frac{3^5}{2^{15}}=\frac{3^5}{(2^3)^5}=\left(\frac{3}{8}\right)^5<1$
$\therefore 3^{20}<6^{15}$
①②에서 $2^{30}<3^{20}<6^{15}$

다른 풀이
$2^{30}=(2^6)^5=64^5$, $3^{20}=(3^4)^5=81^5$,
$6^{15}=(6^3)^5=216^5$
이때 $64<81<216$이므로 $64^5<81^5<216^5$
$\therefore 2^{30}<3^{20}<6^{15}$

150 정답 ②

부등식 $|x^2-2|<7$,
$-7<x^2-2<7$, $-5<x^2<9$
① 부등식 $-5<x^2$의 해는 모든 실수
② 부등식 $x^2<9$의 해는 $-3<x<3$
따라서 ①②에서 $-3<x<3$이다.

마탄자 특례수학

CONTENTS

미적분 I

Ⅰ

다항식의 연산

특례수학
마란자

01 개념다시보기

개념 01 다항식의 곱셈공식

✎ 곱셈공식

① $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
② $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
④ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

■ 곱셈 공식의 변형
① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
② $a^3\pm b^3=(a\pm b)^3\mp 3ab(a\pm b)$ (복부호 동순)
③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
④ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

개념 02 다항식의 나눗셈과 항등식

✎ 두 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$이고 나머지 $r(x)$라 하면 $f(x)=g(x)\ Q(x)+r(x)$ 이 때 나머지 $r(x)$의 차수는 나누는 다항식 $g(x)$의 차수보다 낮아야 한다.

✎ 나머지의 차수

① $g(x)$가 일차식이면 $r(x)=a$
② $g(x)$가 이차식이면 $r(x)=ax+b$

✎ 조립제법

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 다항식 $f(x)$의 계수만을 이용하여 간단하게 구하는 방법

➡ 조립제법을 이용하여 나눗셈 $(x^3-2x^2-4)\div(x-3)$의 몫과 나머지를 구하면 아래와 같다.

풀이 :
$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ & & 3 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 x^2+x+3이고 나머지는 5이다.

개념 07 치환형의 인수분해

인수분해 공식을 바로 적용하기 힘든 식은 인수분해 공식을 적용할 수 있도록 식을 적절히 변형한다.

✎ 공통부분의 치환형

① 공통부분을 A로 치환한다.
② 인수 분해한다.
③ A에 원래의 식을 대입하여 정리한다.

➡ $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$를 인수분해할 때
일차식을 두개씩 조를 짜 전개하면 공통부분이 나타난다.
풀이 : $\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$
$x^2+x=t$로 놓으면
$(t-2)(t-12)+24=t^2-14t+24+24$
$=t^2-14t+48=(t-6)(t-8)=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$
$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

✎ 복이차식 ax^4+bx^2+c의 인수분해

x에 대한 짝수차수항만으로 된 ax^4+bx^2+c와 같은 꼴을 복이차식이라고 한다.
x^4+ax^2+b꼴의 인수분해는 $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해한다.
① 인수분해가 되는 경우
➡ $x^4-5x^2+4=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$
$=(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

② 인수분해가 되지 않는 경우 : A^2-B^2꼴로 변형
➡ $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$
$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$
※ 복이차식에서 완전제곱식 꼴을 만들 때, x^4 항과 상수항을 고정시키고 x^2 항을 더하거나 뺀다.

02 개념확인문제

139 2016학년도 인하대

상수 a, b에 대하여 x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+2y=1 \\ x+ay=b \end{cases}$가 무수히 많은 해를 가질 때 곱 ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⑤ 1

140 2014학년도 건국대

다음 연립방정식의 근이 $x=a$, $y=b$, $z=c$일 때 $a^2+b^2+c^2$ 의 값은?

$$\begin{aligned} 2x+2y+4z &= 6 \\ x+2y+2z &= 4+z \\ -2x-y-z &= -1 \end{aligned}$$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8

141 2015학년도 건국대

$0<x<y$에 대해 $x+y=4$, $x^2-xy+y^2=7$ 일 때, y^3-x^3 의 값은?

① 0 ② 10 ③ 26 ④ 98

142 2019학년도 동국대

대각선의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$이고 넓이가 $14\,\mathrm{cm}^2$인 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $p+q\sqrt{2}$, $p-q\sqrt{2}$ (p, q는 정수)이다. 이때 $|p|+|q|$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

14 부정방정식

143

방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

144 2016학년도 단국대

방정식 $2x^2+y^2-2xy-4x+4=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8

03 특례기출유형

유형 01 복소수와 i 의 거듭제곱

▸ i 의 거듭제곱의 계산

① $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$

② $i+i^2+i^3+i^4=0$

③ $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$
(단, $n \geqq 0$인 정수)

160 2018학년도 경희대

복소수 $z=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$에 대하여 $z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① 0　② -1
③ $(\sqrt{2}-1)i$　④ $(\sqrt{2}+1)i$

161 2018학년도 국민대

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n=i$를 만족시키는 두 자리의 자연수 n의 값 중에서 가장 큰 수는? (단, i는 허수단위)

① 96　② 97　③ 98　④ 99

162 2019학년도 한양대 에리카

$1+\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)+\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)^{2018}$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$　② i　③ $1-i$　④ $1+i$

163 2014학년도 건국대

집합 $A=\left\{i^n+\dfrac{1}{i^n} \mid n=1, 2, 3, \cdots, 100\right\}$의 모든 원소의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0　② 1　③ $2i$　④ $-2i$

164 2016학년도 숙명여대

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$일 때 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2016}\omega^k$ 의 값을 구하여라.

① 1　② 2016　③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$　⑤ 0

193 2019학년도 이화여대

$x^3-1=0$의 한 허근을 α라고 할 때 $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}-\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$의 값을 구하시오.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

194 2019학년도 국민대

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 w라고 할 때,

$w^7+\dfrac{1}{w^7}$의 값은?

① $-i$ ② i ③ -1 ④ 1

195 2019학년도 아주대

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)$과 $\alpha^3+\beta^3$의 값을 차례로 구하면?

① $1,\ 1$ ② $3,\ 1$ ③ $3,\ -1$
④ $3,\ -2$ ⑤ $1,\ -2$

196

방정식 $x^{100}-10x+1=0$의 근
$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots\ ,\ \alpha_{100}$에 대하여
$\alpha_1{}^{100}+\alpha_2{}^{100}+\alpha_3{}^{100}+\ \cdots\ +\alpha_{100}{}^{100}$의 값을
구하시오.

197

사차방정식 $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$의 한 양수 근을 α라 할 때, $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$의 값을 구하시오.

유형 09 연립방정식

▸ 이차연립방정식

① 하나의 방정식을 인수분해 되면 2 개의 일차식을 다른 이차식에 각각 대입한다.

② 인수분해가 되지 않는 이차연립방정식은 상수항 또는 이차항을 소거해 본다.

03 특례기출유형

198 2019학년도 한양대 에리카

연립방정식 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x^2+2xy+4y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라고 할 때, $\alpha\beta$의 값을 모두 구하시오.

① $-1,\ -\frac{2}{7}$ ② $-1,\ \frac{2}{7}$

③ $1,\ -\frac{2}{7}$ ④ $1,\ \frac{2}{7}$

199 2018학년도 국민대

연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ x^2+2xy+y^2=4 \end{cases}$ 의 근이

$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 일 때, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값은?

(단, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$는 모두 양수)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

200 2016학년도 건국대

두 등식 $x^2+xy+y^2=3$과 $x^2+3xy+y^2=-1$을 동시에 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

201 2019학년도 동국대

물탱크에 세 개의 수도꼭지 A, B, C를 틀어 물을 가득 채우려고 한다. 물탱크를 가득 채우는데 A와 B를 틀면 30분, B와 C를 틀면 40분, C와 A를 틀면 24분이 걸린다. A, B, C를 한꺼번에 틀면 물탱크를 가득 채우는 데 걸리는 시간은?

① 17분 ② 18분 ③ 19분 ④ 20분

유형 10 부정방정식

부정방정식

① 정수 조건

➡ (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형

② 실수 조건

➡ $A^2+B^2=0$ 의 꼴로 변형하면 $A=0,\ B=0$

➡ 실수 $x,\ y$에 대한 이차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 판별식 $D\geq 0$임을 이용한다.

202 2019학년도 이화여대

정수 $m,\ n$이 $mn=m-2n+5$를 만족할 때, 가능한 두 정수의 곱 mn의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

① -2 ② 2 ③ 6 ④ 8

213 2014학년도 성균관대

두 부등식 $x^2-7x-30\ge 0$,
$(x+3)(x-a^2+3a)<0$을 동시에 만족시키는 x의 값이 존재하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위를 모두 구한 것은?

① $-2<a<5$
② $a\le -2$ 또는 $a\le 5$
③ $a<-2$ 또는 $a>5$
④ $-2\le a\le 5$
⑤ $a\le -2$ 또는 $a>5$

214

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1<x+2a \\ x^2-(a-3)x-3a\le 0 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

215

부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

유형 13 이차부등식이 항상 성립할 조건

▸ 이차부등식이 항상 성립할 조건

$ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때,
① 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$
➡ $a>0$, $D<0$
② 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geqq 0$
➡ $a>0$, $D\leqq 0$

216 2018학년도 경희대

부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+2a+3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a\le -4$ ② $a<-4$ ③ $a\ge 1$ ④ $a>1$

217 2017학년도 동국대

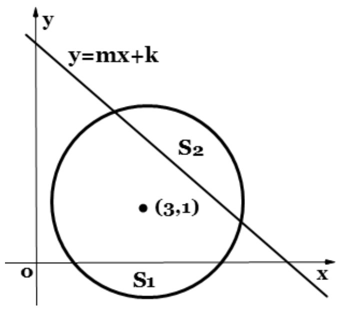
이차부등식 $x^2+2kx+k+2\ge 0$의 해가 모든 실수가 되도록 하고자 할 때, 실수 k의 모든 값의 범위는?

① $k<-1$ 또는 $k>2$ ② $k\le -1$ 또는 $k\ge 2$
③ $-1<k<2$ ④ $-1\le k\le 2$

04 지필발전문제

333 2013학년도 성균관대

아래 그림에서와 같이, 원$(x-3)^2+(y-1)^2=4$와 x축의 (아래쪽 부분)으로 둘러싸인 부분을 S_1, 그리고 점$(6,0)$을 지나는 직선 $y=mx+k$의 (위쪽 부분)과 주어진 원으로 둘러싸인 부분을 S_2라 하자. S_1 의 넓이와 S_2의 넓이가 같을 때, $8m+50$ 의 값은?



① 22 ② 33 ③ 44 ④ 55 ⑤ 60

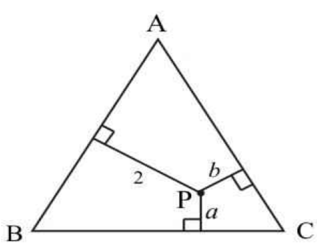
334 2011학년도 한양대

원 $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ 위의 점에서 직선 $3x-4y+2=0$에 이르는 거리 중 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

335 2014학년도 성균관대

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 $\triangle ABC$의 내부의 점 P에서 각 변까지의 거리를 $2, a, b$라 할 때, a^2+b^2의 최솟값은?



① 4 ② $8-4\sqrt{3}$ ③ 16
④ $8+4\sqrt{13}$ ⑤ $12+2\sqrt{3}$

336 2017학년도 건국대

방정식 $7|x+2|+6|x-3|-30=mx$가 서로 다른 두 개의 근을 갖도록 하는 정수 m의 개수는?

① 23개 ② 24개 ③ 25개 ④ 26개

337 2017학년도 건국대

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+b$가 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 점 $C(1,\ 1)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은? (단, $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$

338 2011학년도 한양대

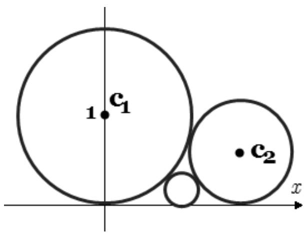
원 또는 직선
$(1+k)x^2+(1+k)y^2-4kx-2ky-9+k=0$은
k값에 관계없이 일정한 두 점 (x_1, y_1) 과 (x_2, y_2)를 지난다.
$x_1+y_1+x_2+y_2$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

04 지필발전문제

344 2012학년도 고려대

다음 그림과 같이 원의 중심이 $(0, 1)$이고 반지름이 1인 원 C_1에 외접하고 $x=1$에서 x축에 접하는 원을 C_2라 할 때, C_1, C_2에 외접하고 x축에 접하는 원을 C_3라 하자. 이 때, C_3의 반지름을 r이라 할 때, $\frac{1}{r}$의 값은?



345 2012학년도 고려대

두 주사위를 던져서 나온 눈을 각각 a, b라 하자. 이때, 두 그래프 $x^2+y^2=1$과 $y=ax+b$가 만나는 경우의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

346 2012학년도 한양대

곡선 $x^2-10x+y^2-10y+41=0$으로부터 직선 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 까지의 최소값은?

① $\frac{23}{5}$　② $\frac{18}{5}$　③ $\frac{8}{5}$　④ $\frac{3}{5}$

347 2018학년도 경찰대

두 점 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$에 대하여 점 P가 곡선 $y=2x^2$ 위를 움직일 때 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값은?

Ⅳ

기초수학

특례수학

마란자

02 특례기출유형

유형 01 수와 식의 연산

▸ **절댓값의 성질**

임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

① $|a|^2 = a^2$ ② $|-a| = |a|$

③ $|ab| = |a||b|$ ④ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

▸ **자연수의 약수 개수와 총합**

p, q 는 소수이고 a, b는 자연수일 때,

① $p^a q^b$ 의 양의 약수의 개수 : $(a+1)(b+1)$

② $p^a q^b$ 의 양의 약수의 총합 :

$(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots q^b)$

▸ **분모의 유리화**

① $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

② $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$= \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

348 2017학년도 건국대

무리수 $\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2}$ 의 정수 부분을 a라 하고 소수 부분을 b라 할 때 $ab+a$의 값은?

① $\sqrt{7}$ ② $1+\sqrt{7}$
③ $3+2\sqrt{7}$ ④ $7-2\sqrt{7}$

349 2015학년도 동국대

$\sqrt{10}$ 의 소수 부분을 a라 할 때, $\dfrac{n}{7} < a < \dfrac{n+1}{7}$ 을 만족하는 자연수 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

350 2012학년도 성균관대

두 실수 $a,\ b$에 대하여 $a > b,\ ab < 0$일 때, $|a| - |a-b| + \sqrt{4b^2}$ 를 간단히 하면?

① $-a$ ② b ③ $-b$ ④ $2b$ ⑤ $-2b$

351 2014학년도 이화여대

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여, $a + \dfrac{1}{b} = b + \dfrac{1}{a} \neq 0$일 때 $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2

02 특례기출유형

358 2015학년도 동국대

자연수 $n=4p^2$의 양의 약수의 총합이 91일 때, 소수 p의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7

유형 02 방정식과 함수

▸ 연립방정식의 활용에서 자주 이용되는 공식

① 총 판매 금액=(물건 한 개의 가격)×(수량)

② 일의 양에 대한 문제 ➡ 완성하는데 n일이 걸릴 때 하루 동안 하는 일의 양은 $\frac{1}{n}$

③ 증가와 감소에 대한 문제

➡A가 x% 증가한 양 : $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$

➡A가 x% 감소한 양 : $A\left(1-\frac{x}{100}\right)$

359 2018학년도 성균관대

물탱크를 가득 채우는데 수도꼭지 A, B, C를 모두 틀면 50분이 걸리고, A와 B만 틀면 60분, A와 C만 틀면 100분이 걸린다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. A만 틀어 물탱크를 가득 채우는 시간은 200분이다.

ㄴ. B만 틀어 물탱크를 가득 채우는 시간은 100분이다.

ㄷ. B와 C만 틀어 물탱크를 가득 채우는 시간은 75분이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

360 2018학년도 동국대

어느 농구 선수가 던진 공의 $x\,(0\le x\le 4)$초 후의 높이가 $(20x-5x^2)$ 미터라고 한다. 공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는?

① 10미터 ② 20미터
③ 30미터 ④ 40미터

361 2014학년도 건국대

12시 12분일 때 시침과 분침이 이루는 예각의 크기는?

① 64° ② 65° ③ 66° ④ 69°

362 2014학년도 건국대

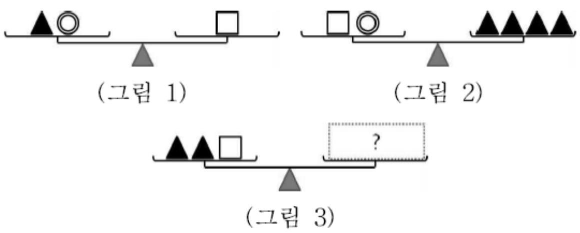
두 함수 $f(x)=|x|+x$, $g(x)=\frac{1}{2}(|x|-x)$에 대하여 $\frac{f(\sqrt{3}-1)+g(\sqrt{3}-1)}{f(1-\sqrt{3})+g(1-\sqrt{3})}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

02 특례기출유형

369 2016학년도 국민대

세 가지 종류의 물체 ▲, □, ◎를 양팔저울에 올려 그림 1, 2와 같은 두 가지 균형 상태를 알게 되었다. 그림 3에서 ▲▲□와 균형을 이루게 하려면 오른쪽 접시에 놓아야 하는 것은?



(그림 1) (그림 2) (그림 3)

① ▲□◎ ② ▲◎◎ ③ □□ ④ ◎◎◎

370 2015학년도 국민대

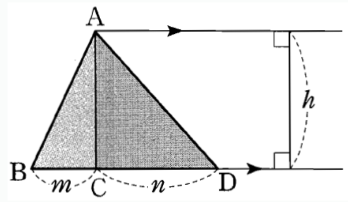
좌표평면에서 (m,n)을 직선 $-3x+5y=7$ 위의 격자점이라 할 때, $|m+n|$의 최솟값은? (단, 격자점은 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

유형 03 삼각형 넓이와 분할

▸ 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다. 즉, 그림의 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$에서



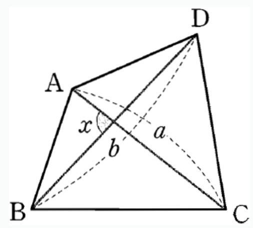
$\overline{BC} : \overline{CD} = m : n$ 이면

$\triangle ABD : \triangle ADC = m : n$

▸ 사각형의 넓이

두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 예각의 크기가 x일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin x$



▸ 닮은 평면도형에서의 비

닮음비가 $m:n$인 두 평면도형에서

① 둘레의 길이의 비는 $m:n$

② 넓이의 비는 $m^2:n^2$

▸ 사다리꼴에서의 평행선과 선분의 길이

$\overline{AD} // \overline{BC}$ 인 사다리꼴 $ABCD$ 에서 $\overline{EF} // \overline{BC}$ 이면

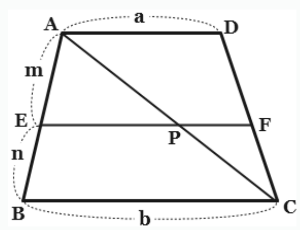
① $\overline{AE} : \overline{BE} = \overline{DF} : \overline{CF}$

② $\triangle ABC$ 에서

$\overline{EP} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AB}$

➡ $\overline{EP} = \dfrac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{bm}{m+n}$

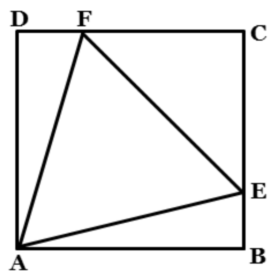
③ $\overline{EF} = \overline{EP} + \overline{PF} = \dfrac{bm+an}{m+n}$



02 특례기출유형

377 2018학년도 건국대

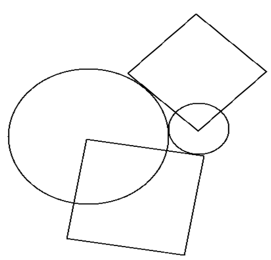
한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 종이 $ABCD$를 대각선 AC를 따라 접으면 변 BC위의 점 E가 변 CD위의 점 F로 옮겨진다. 삼각형 AEF가 정삼각형일 때 선분 AE의 길이는?



① $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
③ $2-\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{7}-\sqrt{3}$

378 2015학년도 이화여대

그림과 같이 두 정사각형과 두 원이 있다. 각 정사각형은 한 원의 중심에서 다른 원에 접선을 그을 때, 중심과 접점을 잇는 선분을 한 변으로 한다. 원의 반지름의 비가 $1:2$일 때, 두 정사각형의 면적의 비를 구하시오.



① $2:3$ ② $3:5$ ③ $5:8$ ④ $8:13$

379 2015학년도 이화여대

세 변의 길이가 $3,\ 7,\ 8$인 삼각형에 내접하는 원의 반지름을 구하시오.

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

380 2016학년도 동국대

사각형 $ABCD$에서 두 대각선의 길이가 $7,8$이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 60° 일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는?

① 7 ② $7\sqrt{3}$ ③ 14 ④ $14\sqrt{3}$

유형 04 삼각형의 모양

▸ **삼각형의 성립 조건**

$a>0,\ b>0,\ c>0$ **가 삼각형의 세 변의 길이일 때,**

① $a+b>c \Rightarrow a+b-c>0$

② $b+c>a \Rightarrow b+c-a>0$

③ $c+a>b \Rightarrow c+a-b>0$

▸ **직각삼각형이 될 조건**

$a,\ b,\ c$ **중** c **가 가장 긴 변의 길이일 때**

① $c^2<a^2+b^2$ ➡ **예각삼각형**

② $c^2=a^2+b^2$ ➡$\angle C=90^\circ$ **인 직각삼각형**

③ $c^2>a^2+b^2$ ➡$\angle C>90^\circ$ **인 둔각삼각형**

➤ 빠른 정답

Ⅰ 다항식의 연산

STEP 01 개념확인문제

001. 7	002. ②	003. 1.3	004. ②	005. ④	006. ①	007. ①	008. ②	009. ⑤	010. ②
011. 14	012. ④	013. 29	014. ⑤	015. ③	016. ②	017. ②	018. ③	019. ②	020. ④
021. ②	022. ④	023. 10	024. ③	025. 9	026. 25	027. 4	028. 62		

STEP 02 특례기출유형

								029. ①	030. ②
031. ③	032. ①	033. ③	034. ③	035. ①	036. ④	037. ①	038. ③	039. ④	040. ④
041. ②	042. ④	043. ②	044. ②	045. ③	046. ②	047. ①	048. ③	049. ④	050. ⑤
051. ①	052. ④	053. ④	054. ①	055. ④	056. ①	057. ①	058. ②	059. ④	060. ①

STEP 03 지필발전문제

061. ③	062. ①	063. ③	064. 10	065. ④	066. ①	067. ②	068. ④	069. ④	070. ②
071. ②	072. ①	073. ④	074. ③	075. ④	076. 해설	077. 해설	078. ①		

Ⅱ 방정식과 부등식

STEP 01 개념확인문제

								079. ④	080. ②
081. ③	082. ③	083. ②	084. ③	085. ③	086. ①	087. ②	088. ④	089. 0	090. ④
091. ①	092. ③	093. ④	094. ④	095. ①	096. ①	097. ①	098. ⑤	099. -6	100. 6
101. -2	102. ②	103. ④	104. ②	105. ④	106. ④	107. ②	108. ③	109. ②	110. ②
111. ④	112. ①	113. ⑤	114. 5	115. 2	116. 1	117. ①	118. ③	119. ②	120. ③
121. ①	122. 7	123. ③	124. ②	125. ④	126. ②	127. ①	128. 4	129. ②	130. 2
131. ⑤	132. ②	133. ③	134. ⑤	135. ①	136.①	137.④	138.②	139.⑤	140.③
141. ③	142. ④	143. ③	144. ②	145. ①	146.③	147.④	148. 해설	149. 해설	150.②
151. ③	152. ②	153. ①	154. ②	155. ③	156.②	157.④	158.③	159.③	

STEP 02 특례기출유형

									160. ③
161. ③	162. ①	163. ①	164. ①	165. ①	166. ②	167. ⑤	168. ①	169. ①	170. ⑤
171. ①	172. ④	173. ①	174. ③	175. ③	176. ①	177. ①	178. ①	179. ①	180. ④
181. ②	182. ①	183. ④	184. $6\sqrt{2}$	185. ③	186. ③	187. ④	188. ①	189. ①	190. ②
191. ③	192. ③	193. ①	194. ③	195. ⑤	196. -100	197. 18	198. ②	199. ②	200. ③
201. ④	202. ②	203. ①	204. ④	205. ②	206. ⑤	207. ①	208. ④	209. ④	210. ①
211. 1	212. ②	213. ④	214. ①	215. 해설	216. ③	217. ④	218. ①	219. ②	220. ②

01. 개념확인문제

001 정답 7

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=4^2-3\cdot 3=7$

002 정답 ②

삼차식의 변형 공식에서
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=1+18=19$

003 정답 1, 3

① $x\neq 0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-1-\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore\ x-\dfrac{1}{x}=1$

② $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$

004 정답 ②

$x-\dfrac{1}{x}=1$의 양변을 제곱하면
$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=1$이므로 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$이다.
다시 양변을 제곱하면 $x^4+\dfrac{1}{x^4}+2=9$이다.
$\therefore\ x^4+\dfrac{1}{x^4}=9-2=7$

005 정답 ④

주어진 양변을 세제곱하면
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=(1+\sqrt{3})^3$에서
좌변 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x^3}$이고,
우변 $(1+\sqrt{3})^3=10+6\sqrt{3}$ 이므로
$10+6\sqrt{3}=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3(1+\sqrt{3})$이다.
$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=7+3\sqrt{3}$

006 정답 ①

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$을 유리화하면 $x=2-\sqrt{3}$이고,
$\dfrac{1}{x}=2+\sqrt{3}$이다.
따라서 $x+\dfrac{1}{x}=4$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$이므로
$x^2+\dfrac{1}{x^2}=16-2=14$

007 정답 ①

직육면체의 각 변을 a, b, c라 하면 문제의 주어진 조건에 의해 $2(ab+bc+ca)=6$, $4(a+b+c)=12$이다.
또한
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$a^2+b^2+c^2=3$이다.
따라서 모든 모서리 제곱의 합은
$4(a^2+b^2+c^2)=12$이다.

008 정답 ②

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$1=0-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-\dfrac{1}{2}$
$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=\dfrac{1}{4} \quad (\because\ a+b+c=0)$

➲ 다른 풀이

$a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $b=0$, $c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이라 하면 $a+b+c=0$,
$a^2+b^2+c^2=1$ 이므로 주어진 조건을 만족한다.

02. 특례기출유형

289 정답 ④

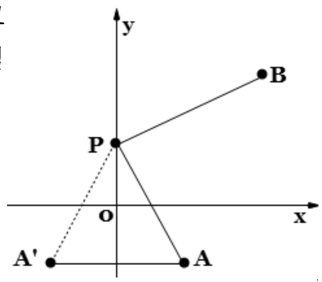
점 $A(2,\ -1)$를 y축 대칭이동한 점은 $A'(-2,\ -1)$이다. 이 때 항상 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이다.

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$이고 최솟값은 $A'(-2,\ -1)$와 점 $B(3,\ 5)$사이의 거리

$\overline{A'B}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$

이다.

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값 $a=\sqrt{61}$ 이다.



이때 $\overline{A'B}$의 직선의 방정식은

$y=\dfrac{5-(-1)}{3-(-2)}(x-3)+5$

$=\dfrac{6}{5}(x-3)+5$이므로 y절편 $b=-\dfrac{18}{5}+5=\dfrac{7}{5}$이다.

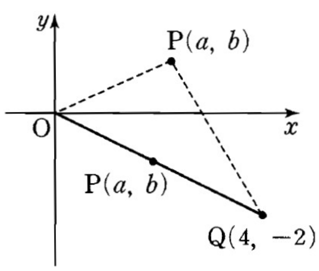
따라서 $a^2+10b=61+14=75$이다.

290 정답 $2\sqrt{5}$

세 점 $O(0,\ 0)$, $P(a,\ b)$, $Q(4,\ -2)$에 대하여

$\sqrt{a^2+b^2}$은 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이이고,

$\sqrt{(a-4)^2+(b+2)^2}$은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이이다. 따라서 주어진 식은 $\overline{OP}+\overline{PQ}$가 됩니다. 그림과 같이 세 점 O, P, Q,라 일직선 위에 있을 때, $\overline{OP}+\overline{PQ}$의 값은 최소이다.



$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b+2)^2}\ \geq \overline{\mathrm{OQ}}$

따라서 구하는

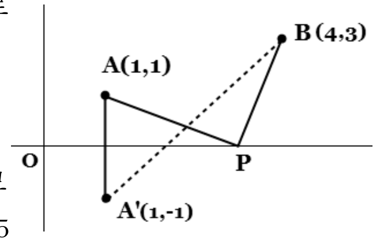
최솟값은$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

291 정답 ①

점 A를 x축 기준으로 대칭이동하면 $A'(1,-1)$이다.

따라서

$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$이므로 최솟값은 $\overline{AB'}=5$



292 정답 ①

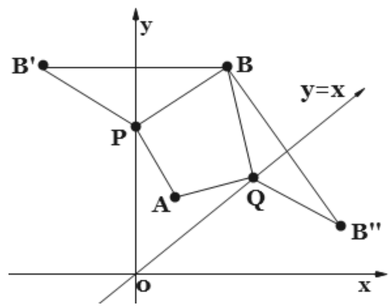
그림과 같이 점 $B(3,6)$의 y축 대칭인 점 $B'(-3,6)$, $B(3,6)$의 $y=x$에 대칭인 점$B''(6,3)$이다.

$\overline{AP}+\overline{PB}$가 최소가 되려면 점 P는 $\overline{AB'}$ 위에 존재하고,

$\overline{BQ}+\overline{QA}$가 최소가 되려면 점 Q는 $\overline{AB''}$ 위에 존재해야 한다.

따라서

$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값



$\overline{AB'}=\sqrt{16+5}=5$, $\overline{BQ}+\overline{QA}$의 최솟값

$\overline{AB''}=\sqrt{5^2}=5$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QA}$의 최솟값은 $5+5=10$이다.

293 정답 8

두 점 $\left(\dfrac{b}{a},\ -\dfrac{a}{b}\right)$와 $\left(-\dfrac{a}{b},\ \dfrac{b}{a}\right)$ 사이의 거리

$d_2=\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)^2}=\sqrt{2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2}$이다.

두 점 $\left(\dfrac{b}{a},\ \dfrac{a}{b}\right)$와 $\left(\dfrac{a}{b},\ \dfrac{b}{a}\right)$ 사이의 거리

$d_1=\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right)^2}=\sqrt{2\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2}=2\sqrt{14}$

에서 $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2=28$이므로

$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2=\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2+4=28+4=32$이고

$d_2 = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$이다.

다른 풀이

$\frac{b}{a} = x$라고 두 점의 좌표는 $(x,\ \frac{1}{x}),\ (\frac{1}{x},\ x)$이다.

거리는 $\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2 + (\frac{1}{x}-x)^2} = 2\sqrt{14}$이다.

양변을 제곱하면 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 30$이다.

이 때 구하는 두점의 좌표는 $(x,\ -\frac{1}{x}),\ (-\frac{1}{x},\ x)$이고

거리는 $\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2 + (-\frac{1}{x}-x)^2} = \sqrt{2x^2 + 2\frac{1}{x^2} + 4}$

$= \sqrt{64} = 8$

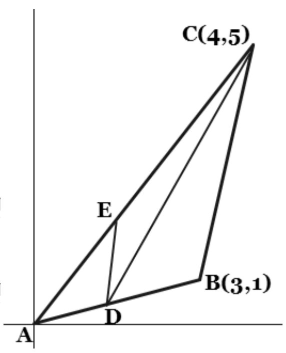
294

정답 ④

삼각형 CDE의 넓이는 삼각형 ADE의 넓이의 2배이므로 $\overline{AE} : \overline{CE} = 1:2$이다.

그러므로 점 E는 두 점 $A(0,0)$, $C(4,5)$를 $1:2$로 내분하는 점이다.

$\therefore\ E(\frac{4}{3},\ \frac{5}{3})$



삼각형 BCD의 넓이가 삼각형 ADE의 넓이의 6배이므로 삼각형 BCD의 넓이는 삼각형 ACD의 넓이의 2배이다.

그러므로 점 D는 두 점 $A(0,0)$, $B(3,1)$를 $1:2$로 내분하는 점이다. 그러므로 $D(1,\ \frac{1}{3})$이다.

따라서 직선 DE의 기울기 $\dfrac{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-1} = 4$이다.

295

정답 ①

정삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

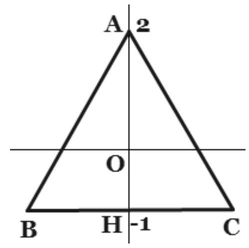
$\overline{AO} : \overline{OH} = 2:1$이다.

$\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$,

$\overline{AB}^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + 3^2$,

$\therefore\ \overline{AB} = 2\sqrt{3}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$



296

정답 ②

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비가 $1:2$이므로

$\overline{BD} : \overline{CD} = 1:2$이다.

그러므로 점 D는 두 점 B, C를 $1:2$로 내분하고

$D(2,\ 1)$이다.

따라서 두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식은

$y - 0 = \frac{1-0}{2-(-2)}(x+2) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

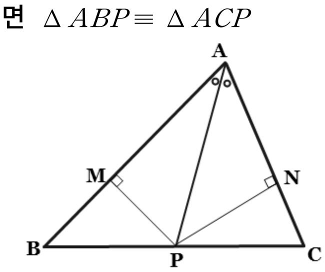
절대개념

▸ **각의 이등분선의 성질**

각의 이등분선 위의 한 점에서 그 각을 이루는 두 변까지의 거리는 같다.

$\angle BAP = \angle CAP$**이면** $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$

이므로 $\overline{PM} = \overline{PN}$



▸ **삼각형의 내각의 이등분선의 성질**

$\triangle ABC$**에서**

$\overline{AP}$**가** $\angle A$**의**

이등분선이면 $\triangle ABP : \triangle ACP = \overline{BP} : \overline{CP}$

$= \overline{AB} : \overline{AC}$

377

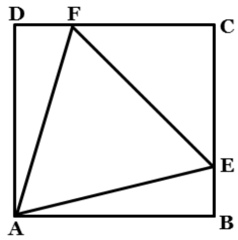
정답 ①

정삼각형 AEF의 한 변의 길이를 $2x$라면 $\angle EAH = 30^\circ$ 이므로

$\overline{AH} = \sqrt{3}x$, $\overline{EH} = x$

삼각형 CEH는 직각이등변 삼각형이므로

$\overline{EH} = \overline{CH} = x$이다.



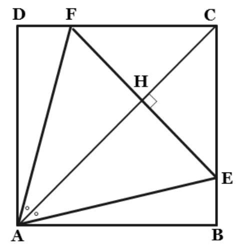
그러므로 $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH}$에서

$\sqrt{2} = \sqrt{3}x + x$

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

정삼각형 AEF의 한 변의 길이

$AE = 2x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$



378

정답 ③

그림과 같이 두 원의 반지름을 각각 r, $2r$이라고 하자.

작은 정사각형의 한변의 길이는

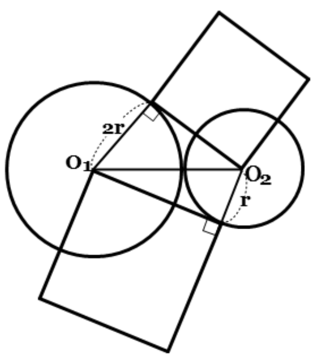
$\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \sqrt{5}r$,

큰 정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \sqrt{8}r$

이다.

두 정사각형의 넓이의 비는 $5r^2 : 8r^2 = 5 : 8$



379

정답 ④

세 변의 길이 3,7,8이 직각삼각형에서 그림과 같이 삼각형 ABH, ACH에서

$3^2 - x^2 = 7^2 - (8-x)^2 \therefore x = \dfrac{3}{2}$ 이때

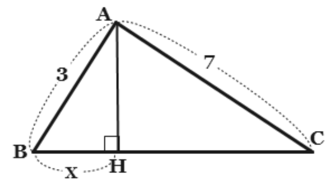
$\overline{AH} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 8 \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$이다.

이 때 내접원의 반지름이 r이면 삼각형 넓이는

$\dfrac{1}{2}(3+7+8) \times r = 6\sqrt{3}$

$\therefore r = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$



380

정답 ④

$\dfrac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

381

정답 ②

삼각형이 성립되려면 가장 긴 변의 길이가 다른 두 변의 길이의 합보다 작아야 한다.

따라서 $x + (x+1) > x+2$에서 $x > 1$이다.

또한 둔각삼각형이 되려면 $(x+2)^2 > x^2 + (x+1)^2$,

$x^2 - 2x - 3 < 0$, $-1 < x < 3$이다.

따라서 x값의 범위는 $1 < x < 3$

382

정답 ③

㉠ 세 변의 길이가 x, $x+2$, $x+4$ 인 삼각형이 되려면 $x + x + 2 > x + 4$ 를 만족해야하므로 $x > 2$ 이다.

㉡ 둔각삼각형이므로 $(x+4)^2 > x^2 + (x+2)^2$ 에서 $x^2 + 8x + 16 > 2x^2 + 4x + 4$ 이다. 부등식을 정리하면 $x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6) < 0$ 을 만족하는 $-2 < x < 6$ 이다.

따라서 ㉠, ㉡에 의해 $2 < x < 6$ 이므로 자연수 x 값들의 합은 $3 + 4 + 5 = 12$ 이다.

383

정답 ④

세 변의 길이가 $n-1$, $n+1$, $n+3$인 삼각형이 되려면 $(n+1)+(n-1) > n+3$을 만족시켜야 한다. 따라서

$n > 3$ ⋯ ㉠

세 변의 길이가 $n-1$, $n+1$, $n+3$인 삼각형이 예각삼각형이려면 $(n+1)^2 + (n-1)^2 > (n+3)^2$이다.

그러므로 위 부등식을 정리하면

$n^2 - 6n - 7 = (n-7)(n+1) > 0$이므로